Gruppentheorie für Quantenmechaniker

Universität Potsdam, Sommersemester 2009

Übungsblatt 1 (22 Punkte)

1 Permutationen **8P**

Die Gruppe der Bijektionen eines Anfangsstücks $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ der natürlichen Zahlen auf sich selbst nennt man die *symmetrische Gruppe* S_N; ihre Elemente heißen *Permutationen*. Die S_N operiert in natürlicher Weise auf den Zahlen $1 \ldots, N$, oder auch auf jeder beliebigen Menge von N Dingen, die man von 1 bis N numeriert hat.

Unter einem k-*Zykel* versteht man eine Permutation $\sigma \in S_N$, die k Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ zyklisch vertauscht,

$$\sigma(n_1) = n_2\,, \quad \sigma(n_2) = n_3\,, \quad \ldots, \sigma(n_k) = n_1\,, \tag{1.1}$$

und alle anderen Zahlen unverändert lässt.

(1) Zeigen Sie: jede Permutation $\sigma \in S_N$ kann man in eindeutiger Weise (bis auf Reihenfolge) in ein Produkt disjunkter Zykel zerlegen. **2P**

Für eine Permutation σ definiert man als eine Art Fingerabdruck den *Zykeltyp* (σ), der die Längen und Anzahlen der Zykel angibt, in die σ zerlegt werden kann; Beispiel:

Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

zerfällt in die Zykel

$$\sigma = (1843)\,(26)\,(79)\,(5) \tag{1.1.2}$$

und hat den Zykeltyp

$$(\sigma) = (4)^1\,(2)^2\,(1)^1\,, \tag{1.1.3}$$

also: σ besteht aus einem 4-Zykel, zwei 2-Zykeln und einem 1-Zykel.

(2) Zeigen Sie: die Zykelklassen (= Permutationen gleichen Zykeltyps) sind gerade die Konjugationsklassen von S_N. **2P**

(3) Ein gutes Beispiel für eine Realisierung der Gruppenoperation "Konjugation" in Hardware ist die im zweiten Weltkrieg benutzte Chiffriermaschine *Enigma*: **4P**

Diese Maschine permutiert die 26 Buchstaben von A bis Z; abhängig von einem geheimen Schlüssel kann eine sehr große Anzahl verschiedener Permutationen realisiert werden, und ein Walzenmechanismus sorgt dafür, dass für jedes Zeichen einer Nachricht eine andere Permutation benutzt wird.

Dieser Walzenmechanismus hat eine Besonderheit: er wird zweimal durchlaufen, was vom Konstrukteur als tolles Feature gepriesen wurde — ein Auszug aus der Patentschrift: *"Durch diesen Rückgang des Stromes durch den Chiffrierwalzensatz findet eine weitere Verwürfelung statt. [...] Infolge dieser Anordnung ist es möglich, mit verhältnismäßig wenig Chiffrierwalzen auszukommen und trotzdem eine große Chiffriersicherheit aufrechtzuerhalten."*

Tatsächlich aber ist diese vermeintlich geniale Konstruktion ein Kardinalfehler der Enigma und hatte weitreichende Konsequenzen; eine mathematische Konsequenz ist: alle durch Enigma realisierbaren Permutationen liegen in derselben Konjugationsklasse von S_{26}, haben also denselben Zykeltyp, und noch dazu einen sehr simplen. Welchen?

2 Raumgruppen **6P**

Interessante Gruppen der Physik entstehen oft als Untergruppen einer größeren Gruppe durch eine Zusatzbedingung; sehr ergiebig ist dieses Verfahren bei der Untersuchung der Symmetrien von Kristallen, die man durch ihre jeweilige *Raumgruppe* beschreibt. Mutter aller Raumgruppen ist die Euklidische Gruppe des $V = \mathbb{R}^3$,

$$S(V) \;=\; \{(R|\vec{t}) \mid \; R \in O(V) \wedge \vec{t} \in V\}\,. \tag{2.1}$$

Die Zerlegung von Bewegungen in Translation und Rotation legt es nahe, zwei Unterguppen zu definieren: $T(V) \;:=\; \big\{(\mathbb{1}|\vec{t}) \mid \; \vec{t} \in \mathbb{R}^3\big\}$ heißt *Translationsgruppe* und $P(V) \;:=\; \{(R|0) \mid \; R \in O(3)\}$ heißt *Punktgruppe* des Raumes.

Die Euklidische Gruppe schränken wir nun ein auf diejenigen Bewegungen, die einen bestimmten starren Körper invariant lassen, genauer:

Wir betrachten einen Festkörper Γ aus N verschiedenen Atomsorten. Den können wir beschreiben als Tupel $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ von Punktmengen, wobei Γ_j genau die Orte der Atome der Sorte j enthält. Als *Raumgruppe* $S(\Gamma)$ dieses Festkörpers bezeichnet man diejenigen Bewegungen des Raumes, die alle Punktmengen auf sich selbst abbilden (also: jedes blaue Atom auf ein blaues Atom, jedes rote Atom auf ein rotes Atom, ...):

$$S(\Gamma) \;\;:=\;\; \{s \in S(V) \mid \; s(\Gamma_1) = \Gamma_1, \ldots, s(\Gamma_N) = \Gamma_N\} \tag{2.2}$$

Wichtige Untergruppen von $S(\Gamma)$ sind wieder die Punktgruppe

$$P(\Gamma) \;\;:=\;\; P(V) \cap S(\Gamma) \tag{2.3}$$

und die Translationsgruppe

$$T(\Gamma) \;\;:=\;\; T(V) \cap S(\Gamma) \tag{2.4}$$

.

(1) Zeigen Sie: $T(\Gamma)$ ist Normalteiler von $S(\Gamma)$. 2P

(2) Gilt stets $S(\Gamma)/T(\Gamma) \cong P(\Gamma)$? 2P

(3) $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N)$ heißt *Kristall*, wenn es drei linear unabhängige Vektoren $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3 \in V$ gibt, so dass $(\mathbb{1}|\vec{t}_k) \in S(\Gamma)$ für $k = 1, 2, 3$. 2P
Zeigen Sie: es gibt drei (nicht eindeutig bestimmte) Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V$, so dass

$$T(\Gamma) \;=\; \big\{(\mathbb{1}|\vec{a}_j n^j) \mid \; n^1, n^2, n^3 \in \mathbb{Z}\big\}\,. \tag{2.3.1}$$

(Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ heißen *primitive Gittervektoren* des Kristalls. Der Orbit $T(\Gamma)(0)$ des Ursprungs unter der Translationsgruppe $T(\Gamma)$ heißt auch das *Bravais-Gitter* des Kristalls.)

3 Kleines Beispiel **8P**

Gegeben ist ein 2-dimensionales quadratisches Gitter: die Gittervektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind gleich lang und orthogonal; an jedem Gitterpunkt sitzt ein gleichartiges Atom, weitere Atome sind nicht vorhanden.

(1) Bestimmen Sie die Raumgruppe S. 2P

(2) Für eine reine Translation $s = (\mathbb{1}|\vec{t})$ dieses Gitters: 2P
Bestimmen Sie die Konjugationsklasse $K(s)$ und den Zentralisator $Z(s)$, und verifizieren Sie die Klassengleichung

$$|K(s)| \;=\; [S : Z(s)] \tag{3.2.1}$$

(3) Überzeugen Sie sich, dass die Punktgruppe $P \subset S$ *kein* Normalteiler ist. 2P

(4) Zeigen Sie: der naive Versuch, in naheliegender Weise eine Gruppenverknüpfung $*$ auf S/P einzuführen, nämlich durch 2P

$$\begin{aligned} \star: \quad S/P \times S/P \;&\longrightarrow\; S/P\,, \\ (s_1P, s_2P) \;&\longmapsto\; s_1P * s_2P \;:=\; (s_1 \circ s_2)P\,, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

geht schief; die Gruppenstruktur von S induziert also *keine* Gruppenstruktur auf S/P.

(Das ist anders als bei Vektorräumen, da klappt "modulo Unterraum" schließlich immer — aber Vektorräume sind abelsch, und da ist jeder Unterraum automatisch auch ein Normalteiler!)