Gruppentheorie für Quantenmechaniker

Universität Potsdam, Sommersemester 2009

Übungsblatt 2 — Besprechung: Mittwoch, 27. 05. 2009

1 Trägheitssatz

Gegeben sei eine symmetrische Bilinearform $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, also eine Abbildung

$$A : \; x, y \longmapsto x^t A y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \,, \tag{1.1}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$-Matrix A.

(1) Zeigen Sie: es gibt eine Basistransformation $S : x \longmapsto \tilde{x} = Sx$, so dass

$$x^t A y \;=\; \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{y} \tag{1.1.1}$$

mit einer transformierten Matrix

$$\tilde{A} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

(2) Die Signatur (m, n, p) von A, wo m die Zahl der Diagonalelemente +1, n die Zahl der Diagonalelemente -1, und p die Zahl der Diagonalelemente 0 angibt, ist eindeutig.

(3) Ist A nicht ausgeartet, gilt also $p = 0$, so ist die Invarianzgruppe der Bilinearform A isomorph zur $O(m, n)$. Warum definiert man eigentlich keine Gruppen $U(m, n)$?

2 Scherungen

In der Vorlesung haben Sie gehört, dass eine Scherung eine symplektische Transformation ist. Ein Beispiel für eine Scherung ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Rechnen Sie nach, dass A in der Tat symplektisch ist. Schreiben Sie A als Produkt von Drehungen D und Quetschungen Q:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

mit geeigneten Parametern θ und t. (Möglicherweise benötigen Sie mehr als eine Drehung.) Hinweis: Überlegen Sie, wie die Quetschung sich unter Konjugation mit einer Drehung ändert.

3 Symplektische Transformationen

Wir fassen die $2n$ kanonischen Variablen q_j und p_j eines Systems der klassischen Mechanik zu einem Vektor $\xi = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)^t$ zusammen.

(1) Zeigen Sie: ist die Hamiltonfunktion eine quadratische Form

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} \xi_j h_{jk} \xi_k \equiv \tfrac{1}{2} \xi^t h \xi \,, \tag{3.1.1}$$

mit einer Matrix h die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit symmetrisch annehmen können, so ist die natürliche Zeitentwicklung eine symplektische Transformation $\in Sp(2n)$.

(2) Sei A eine $n \times n$-Matrix und $S(t) := \exp(tA)$. Welche Bedingungen muss die Matrix A erfüllen, damit $S(t)$ symplektisch ist?

(3) Finden sie eine Matrix h, so dass die zugehörige quadratische Hamiltonfunktion genau $S(t)$ als Zeitentwicklungsoperator hat.