Gruppentheorie für Quantenmechaniker

Universität Potsdam, Sommersemester 2009

Übungsblatt 3 — Besprechung: Mittwoch, 01. 07. 2009

1 Heisenberg-Algebra

(1) Zur Bestimmung von Erwartungswerten einer Observablen hatten wir den Ausdruck

$$\langle a, b\rangle \;:=\; \begin{cases} \int d\Gamma\, a(\Gamma)\, b(\Gamma) & \text{(klassisch)}\,, \\ \mathrm{tr}(ab) & \text{(quantenmechanisch)} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

eingeführt. Prüfen Sie, ob es sich hier tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt; müssen Sie zusätzliche Bedingungen an a und b stellen?

(2) Zeigen Sie, dass das Liegruppenelement $\exp(a*)$ orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, also dass gilt

$$\langle\, e^{a*}b\,,\, e^{a*}c\,\rangle \;=\; \langle b, c\rangle\,. \tag{1.2.1}$$

(3) Das Liegruppenelement $\exp(a*)$ ist eine lineare Abbildung auf der Lie-Algebra, außerdem ist es eine kanonische Transformation. Für den Fall einer Heisenberg-Algebra sollte $\exp(a*)$ also folglich symplektisch sein. Überzeugen Sie sich, dass dies tatsächlich so ist. Können Sie jede symplektische Transformation in dieser Form schreiben?

(4) Gegeben Sei eine Heisenberg-Algebra eines Systems mit einem Freiheitsgrad, $\mathcal{A} = \text{span}\{q, p, \mathbb{1}\}$, sowie ein Element H der zugehörigen Weyl-Algebra mit

$$H * q = -p\,, \qquad H * p = \omega^2 q\,, \qquad H * \mathbb{1} = 0\,. \tag{1.4.1}$$

Bestimmen Sie die Matrix von $\exp(-tH*)$ in der natürlichen Darstellung der Algebra.

2 Strukturkonstanten

(1) Geben Sie Matrizen für die Generatoren der symplektischen Gruppe auf einem Freiheitsgrad (Phasenraum-Koordinaten p, q) an. (Zur Erinnerung: Drehung, Stauchung, Scherung.) Führen Sie Linearkombinationen dieser Generatoren ein, die symmetrische bzw. antisymmetrische Matrizen sind.

(2) Rechnen Sie die Kommutatoren dieser Matrizen aus und geben Sie die Strukturkonstanten der Lie-Algebra $\mathrm{sp}(2,\mathbb{R})$ zur symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ an.

(3) Dieselbe Aufgabe für die Lorentz-Gruppe $\mathrm{SO}(2,1)$ in einer Raumzeit mit zwei räumlichen Dimensionen. (Zur Erinnerung: eine Drehung und zwei *boosts*.)

(4) Vergleichen Sie die beiden Lie-Algebren $\mathrm{sp}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{so}(2,1)$.

3 Lemma von Schur

(1) Seien $R : g \mapsto R_g$ und $S : g \mapsto S_g$ zwei Darstellungen der Gruppe G auf Vektorräumen V und W. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft:

$$S_g T = T R_g \qquad \text{für alle } g \in G \tag{3.1.1}$$

Zeigen Sie: der Kern K und das Bild B von T,

$$K = \{v \in V | Tv = 0\}\,, \qquad B = TV \;\; := \;\; \{Tv \in W | v \in V\}\,, \tag{3.1.2}$$

sind Unterräume von V bzw. W, die unter der Wirkung von G abgeschlossen sind (sogenannte *invariante Unterräume*).

Nicht Teil der Aufgabe sind die beiden Folgerungen:

Folgerung 1: sind die Darstellungen R und S irreduzibel, so ist entweder $T = 0$ oder T ist bijektiv (und damit wären R und S äquivalente Darstellungen).

Folgerung 2: im Fall $R = S$ bedeutet Gleichung (3.1.1), dass T mit allen Matrizen R_g vertauscht. Ist die Darstellung irreduzibel, muss T ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein: $T = c\mathbb{1}$.