Einführung in die Quantenoptik

Sommersemester 2009
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 2 Ausgabe: 06. Mai 2009
Abgabe: 12. Mai 2009

Hinweis. Lassen Sie sich von Fehlern in den angegebenen Formeln nicht verwirren. Im Zweifelsfall ("das Ergebnis sieht aber kompliziert aus") fehlt eben im Aufgabentext ein Faktor 2, π, i, -1 ...

Problem 2.1 – Projekt Wikipedia (4 points)

[Abgabe per email bis zum 19. Mai 2009]

(i) Markieren Sie einige historische Stationen der Quantenoptik als Wissenschaft von der Wechselwirkung zwischen (sichtbarem) Licht und Materie. Anknüpfungspunkte: Nobelpreis-Laudationes für Albert Einstein, C. Cohen-Tannoudji, S. Chu und W. D. Phillips, für W. Ketterle und für Roy Glauber. Web site des Max-Planck-Instituts für Quantenoptik (Garching), gegründet von Herbert Walther. (Als html-Liste verschicken.)

(ii) Gehen Sie die Inhaltsverzeichnisse der einschlägigen Bücher durch und stellen Sie einen "kleinsten gemeinsamen Nenner" von Konzepten und grundlegenden Experimenten zusammen. (Als html-Liste verschicken.)

(iii) Suchen Sie nach "Quantenoptik" in den Zeitschriften der folgenden wissenschaftlichen Gesellschaften/Reihen: *Physical Review*, *Optical Society of America*, *Optics Communications*. Wählen Sie einen Zeitschriftenbeitrag aus dem Jahr 2009 zum Thema "Quantenoptik" mit mindestens 30 Zitaten aus und machen Sie eine kleine Statistik der Zeitschriften, die im Literaturverzeichnis auftauchen.

Problem 2.2 – Atomic polarizability (6 points)

(i) In the lecture, we have seen the time-dependent perturbation theory for a two-level atom driven by a monochromatic laser field, $|\psi(t)\rangle = c_{\rm e}(t)|e\rangle + c_{\rm g}(t)|g\rangle$. This solution gives the average (induced) dipole moment (assuming real-valued $\mathbf{d}_{\rm ge}$)

$$\langle\psi(t)|\mathbf{d}_{\rm ge}\,(\sigma + \text{h.c.})\,|\psi(t)\rangle = \alpha_g(\omega_L)\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_L t} + \text{h.c.} \tag{2.1}$$

Compute the dipole moment if the initial state is the ground state and read off the so-called linear ground-state polarizability $\alpha_g(\omega_L)$ (can be a tensor). Show that

$$\alpha_g(\omega) = \frac{(2\omega_{\rm eg}/\hbar)\mathbf{d}_{\rm ge}\otimes\mathbf{d}_{\rm ge}^*}{\omega_{\rm eg}^2 - \omega^2} \tag{2.2}$$

(ii) Putting together the information from the lecture, one finds that the Bloch vector of a two-level atom $\mathbf{s} = (s + s^*, \mathrm{i}(s - s^*), s_3)$ satisfies the equations

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s &= (\mathrm{i}\Delta - \Gamma)\, s + \mathrm{i}(\Omega/2) s_3 && (2.3) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s_3 &= -\gamma(s_3 + 1) + \mathrm{i}\,(\Omega s^* - \Omega^* s) && (2.4) \end{aligned}$$

where Γ and γ are phenomenological decay rates. Compute the stationary solution of these equations and show that the average coherence $s_{\rm stat}$ is given by

$$s_{\rm stat} = \frac{\Omega\gamma(\Delta - \mathrm{i}\Gamma)}{\gamma(\Delta^2 + \Gamma^2) + \Gamma|\Omega|^2} \tag{2.5}$$

Comment on the similarities and differences to Eq.(2.2).

Problem 2.3 – Thomas–Reiche–Kuhn sum rule (6 points)

(i) Show that the momentum operator $\mathbf{p}$ of a bound atomic electron has the following matrix elements

$$\langle \mathrm{e}|\mathbf{p}|\mathrm{g}\rangle = \mathrm{i} m \omega_{\rm eg} \langle \mathrm{e}|\mathbf{x}|\mathrm{g}\rangle \tag{2.6}$$

where $\hbar\omega_{\rm eg} = E_{\rm e} - E_{\rm g}$.

(ii) Prove the Thomas-Reiche-Kuhn sum rule

$$\sum_{\rm e} \omega_{\rm eg} |\langle \mathrm{e}|\mathbf{x}|\mathrm{g}\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m} \tag{2.7}$$

where the sum is over all excited states (including non-bound states).

Hint. (i) $[H, \mathbf{x}]$ (ii) $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$.

Problem 2.4 – A simple dephasing model (4 points)

(i) Solve the equation for spin precession for an effective magnetic field $\mathbf{B}_{\rm eff} = \frac{1}{2}\hbar\Omega\mathbf{e}_3$ and express the spin vector $\mathbf{s}(t)$ in terms of a rotation matrix acting on $\mathbf{s}(0)$.

(ii) Average the spin vector over a gaussian distribution of rotation angles, $P(\Omega t)$, such that

$$\overline{\Omega t} = \Omega_0 t, \qquad \overline{(\Omega t)^2} - (\Omega_0 t)^2 = \Gamma t \tag{2.8}$$

and show that the averaged spin vector $\bar{\mathbf{s}}$ satisfies the "master equation"

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{\mathbf{s}} = \Omega_0 \mathbf{e}_3 \times \bar{\mathbf{s}} - \frac{\Gamma}{2} \left[\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{s}}) \right] \tag{2.9}$$

Eq.(2.8) is actually cheating: one should better replace Ωt by an integral $\int_0^t \mathrm{d}t'\, \Omega(t')$ and consider $\Omega(t')$ as a "stochastic (or Wiener) process" with diffusion constant Γ. You are also allowed to ignore that angles like Ωt are sometimes restricted to an interval $0 \ldots 2\pi$.