Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SS 2010) -

Übungsblatt 3 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 04.05.10 – Abgabe 11.05.10 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Rechenregeln Operatoren)* (5 Punkte)

Bestätigen Sie die folgenden Rechenregeln für Operatoren. Fragen nach Definitionsbereichen dürfen Sie im ersten Anlauf non-chalant ignorieren ....

$$(\alpha\hat{A})^\dagger = \alpha^*\hat{A}^\dagger \tag{1}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{2}$$

$$[\hat{A},\hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger] \tag{3}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \tag{4}$$

$$(\hat{A}^\dagger)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^\dagger \tag{5}$$

▷ Aufgabe 2 (Initiationsritus Quantenmechanik) (3 Punkte)

Seit Menschengedenken werden Studierende der Grundlagen der Quantenmechanik gebeten, zu beweisen:

(a) Im unitären Raum gilt die sog *Schwarz'sche Ungleichung*[2]

$$|\langle\psi,\chi\rangle| \leq \|\psi\|\|\chi\|\,, \tag{6}$$

(b) die sog *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|\psi+\chi\|^2 + \|\psi-\chi\|^2 = 2\|\psi\|^2 + 2\|\chi\|^2\,. \tag{7}$$

(c) und das Skalarprodukt kann durch die Norm ausgedrückt werden,

$$4\langle\psi,\chi\rangle = \|\psi+\chi\|^2 - \|\psi-\chi\|^2 + i\|i\psi+\chi\|^2 - i\|i\psi-\chi\|^2\,. \tag{8}$$

▷ Aufgabe 3 (Ein kleiner Satz) (1 Punkt)

Sei $\hat{T}$ linearer Operator in $\mathcal{H}$, und $\hat{T}^\dagger$ der zu $\hat{T}$ adjungierte Operator. Beweisen Sie die nützliche Ungleichung

$$\langle\hat{T}^\dagger\hat{T}\rangle \geq 0\,. \tag{9}$$

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

[2] Für den "technischen Jargon" vgl. die Handreichung zu Hilberträumen, Operatoren etc. auf der Netzseite des Kurses ...

▷ Aufgabe 4 (Unschärferelationen) (3 Punkte)

Sie erinnern sich an die Varianz (Unschärfe) eines Operators, $\delta A := [\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle]^{1/2}$.

Seien nun $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit Kommutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}\,. \tag{10}$$

Beweisen Sie die folgend wichtige Ungleichung für das Produkt der Varianzen

$$\delta A \delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|\,. \tag{11}$$

Hinweis: Machen Sie von Aufgabe 1 Gebrauch. Setzen Sie dort $\hat{T} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle + i\lambda(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)$ und minimieren bezüglich λ.

▷ Aufgabe 5 (Zustand minimaler Unschärfe)* (3 Punkte)

Für ein Punktteilchen im $\mathbb{R}$ mit kanonischem Kommutator $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ wird aus Aufgabe 4 die *Heisenberg'sche Unschärferelation*,

$$\delta q \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{12}$$

Ein Zustand bei dem hier Gleichheit herrscht heißt *Zustand minimaler Unschärfe* (engl: minimum uncertainty state). Zeigen Sie, daß der allgemeinste Zustand minimaler Unschärfe in der Ortsdarstellung durch eine Gaussfunktion beschrieben wird.

Hinweis: Betrachte Beweis zu Aufgabe 2. Setze o.B.d.A. $\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$; minimal heißt dann neben $\lambda = \hbar/(2\delta p^2)$ auch $\langle\hat{T}^\dagger\hat{T}\rangle) = 0$, also $\hat{T}\psi_{\min} = 0$. Auswertung dieser Gleichung in Ortsdarstellung liefert den gesuchten Beweis.

▷ Aufgabe 6 (Qubit) (5 Punkte)

Das "Bit" ist bekanntlich das Elementarteilchen der Informatik: Sein Konfigurationsraum umfasst nur die beiden Zustände "gesetzt" (symbolisch `1`) und "ungesetzt" (symbolisch `0`). Wird das Bit quantisiert, erhält man das Elementarteilchen der Quanteninformatik, genannt "Qubit".

Der Hilbertraum des Qubit ist zweidimensional – das Qubit ist gewissermaßen das kleinste nicht-triviale quantemechanische System. Physikalisch realisieren lassen sich Qubits durch den Spin eines Elektrons, den Polarisationsfreiheitsgrad eines Photons, oder zwei Energieniveaus eins Atoms.

Die klassichen Zustände `1` und `0` werden im Qubit-Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{qubit}}$ durch die beiden orthonormalen Basisvektoren $|\mathtt{1}\rangle$ und $|\mathtt{0}\rangle$ dargestellt, genannt die "Computer-Basis". Gemäß Superpositionsprinzip ist aber auch die Superposition

$$|\psi\rangle = \psi_0|\mathtt{0}\rangle + \psi_1|\mathtt{1}\rangle\,, \tag{13}$$

ein möglicher Zustand des Qubit. Die Koeffizienten $\psi_i \in \mathbb{C}$ bilden die Darstellung in der Computer-Basis,

$$\psi_i = \langle i|\psi\rangle\,, \tag{14}$$

und werden folgendermaßen interpretiert:

$$|\psi_i|^2 = \text{W'keit, das Qubit gesetzt } (i = \mathsf{1}) \text{ bzw ungesetzt } (i = \mathsf{0}) \text{ zu finden} \tag{15}$$

Um sich das Leben (und Schreiben) etwas zu erleichtern, werden Qubits gerne in einer Matrixdarstellung beschrieben. Die Darstellung ist definiert durch eine Abbildung $\mathcal{H}_{\text{qubit}} \to \mathbb{C}^2$

$$|\mathsf{0}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\mathsf{1}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Die Manipulation eines Bits wird in der Informatik durch Gatter erreicht. Ein Gatter, das als Input ein Bit nimmt, und als Output wiederum ein Bit liefert, heißt unäres Gatter. Mathematisch formuliert ist ein unäres Gatter eine Abbildung

$$g : \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\} \;\to\; \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\} \tag{17}$$

(a) Zeigen Sie: es gibt genau 4 unäre Gatter.

(b) Zeigen Sie: Die einzigen reversiblen Gatter sind die Identität (hier bezeichnet IDT) und das logische NOT. Ein reversibles Gatter ist ein Gatter, bei dem Sie bei Kenntnis des Output auf den Input schließen können.

(c) Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Informatik*: Es gibt kein unäres Gatter $\sqrt{\text{NOT}}$, das in Hintereinanderschaltung das NOT realisiert.

In der Quanteninformatik werden reversible unäre Gatter durch unitäre Operatoren dargestellt, und das Hintereinanderschalten von logischen Gattern entspricht der Multiplikation der zugeordneten Operatoren. In der Matrixdarstellung sind Gatter einfach unitäre 2×2-Matrizen. Hintereinanderschaltung ist also einfach Matrixmultiplikation.

(d) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\hat{U}_{\text{NOT}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ist unitär und realisiert das logische NOT für Qubits.

(e) Zeigen Sie: der Fundamentalsatz der Informatik wird mit Qubits außer Kraft gesetzt. Es gibt sehr wohl ein unäres Gatter $\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}$, das in Hintereinanderschaltung das logische NOT realisiert, $\hat{U}_{\text{NOT}} = \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}$. Welche Matrix ist diesem Gatter zugeordnet?

Genießen Sie hier ruhig Ihren Erkenntnisvorsprung vor den Kollegen aus der Informatik. Und verbeugen sich in Demut vor der Einsicht: nicht alles, von dem man felsenfest überzeugt ist (weil man's so in der Uni gelernt hat) ist unter allen Umständen richtig. Werden Sie jetzt aber bloß nicht übermutig …

▷ **Aufgabe 7 (Quantenhexerei)** (π Punkte)

Im Anschluss an den ersten Mai erreicht Sie eine SMS:

Take a friend, go to the bar, get a drink and play a game:

Place a coin head up in a box. Seal the box so that nobody can look inside. You will now take three turns, first you, then your friend, then you again. At each turn you (or your friend) can manipulate the coin in any desired manner, for example turn it around, or not turn it around. Of course neither you nor your friend can see the actual state of the coin (heads or tails up). Also, you can't see what action your friend takes (turn or not turn), nor can your friend see what action you take. Once you are done, you may open the box. You win if the coin is still head up in the end. Otherwise your friend wins.

(a) Convince your friend that there is no winning strategy for neither you nor your friend.

(b) Recall quantum mechanics (but don't tell your friend) and win the game – always!

Reference: D. Meyer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052.