Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SS 2010) -

Übungsblatt 7&8 (40 Punkte)

Ausgabe 02.06.10 – Abgabe 15.06.10 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Hermite'sche Polynome) (8 Punkte)

Im Anschluss an die Vorlesung darf ich Sie an die Hermite'schen Polynome erinnern,

$$H_n(y) := e^{y^2/2}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) Die sog *Rodriguez Formel* für die Hermite'schen Polynome lautet

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2} \tag{2}$$

Hinweis: Vielleicht beweisen Sie zunächst (1)$=e^{y^2}\left[e^{-y^2/2}\left(y-\frac{d}{dy}\right)e^{y^2/2}\right]^n e^{-y^2}$ und erinnern sich dann an die Produktregel der Differentialrechnung, $e^{-y^2/2}\left(y-\frac{d}{dy}\right)e^{y^2/2}f(y) = f'(y)$.

(b) Die Funktion

$$g(y,z) := e^{-z^2+2zy} \tag{3}$$

ist eine sog *Erzeugende* der Hermite'schen Polynome,

$$g(y,z) = \sum_{n=0} H_n(y)\frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

Hinweis: Betrachten Sie die n-te Ableitung der Erzeugenden $g(y,z)$ nach z, und setzen im Ergebnis $z=0$. Möglicherweise ist es dabei hilfreich, die Erzeugende in der Form $g(y,z) = e^{y^2}e^{-(z-y)^2}$ zu schreiben, und sich an die Kettenregel der Differentialrechnung zu erinnern, $\frac{\partial}{\partial z}e^{-(z-y)^2} = -\frac{\partial}{\partial y}e^{-(z-y)^2}$.

(c) Eine *Integraldarstellung* lautet

$$H_n(y) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{y^2-(z-y)^2}}{z^{n+1}}dz \tag{5}$$

worin C eine geschlossene Kontur in der komplexen z-Ebene, die den Ursprung umschließt.

Hinweis: Benutzen Sie (3)=(4), dividieren beide Seiten durch z^{m+1}, integrieren $\oint_C dz$, und erinnern sich an den Residuensatz.

(d) Die Hermite'schen Polynome erfüllen eine *Rekursionsbeziehung*

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n - 2nH_{n-1}(y) \tag{6}$$

und

$$H_n'(y) = 2nH_{n-1}(y) \tag{7}$$

(e) Spezielle Werte sind

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{8}$$

$$H_{2n+1}(0) = 0 \tag{9}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Erzeugende für $y = 0 \ldots$

(f) Die Hermite'schen Polynome sind von definiter Parität,

$$H_n(y) = (-1)^n H_n(-y) \tag{10}$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich von $g(-y, -z) = g(y, z) \ldots$

▷ **Aufgabe 2 (Kohärente Zustände)** (10 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Eigenvektoren von $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ kennengelernt, sog *Fockzustände* $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$. Fockzustände, daran darf ich Sie erinnern, sind die stationären Zustände des harmonischen Oszillators.

Bei den stationären Zuständen bewegt sich bekanntlich nichts. Nun hat man beim harmonischen Oszillator aber immer ein schwingendes Teilchen vor Augen. Um dieses Bild auch in der Quantenmechanik wieder zu finden, muss die zeitliche Entwicklung linearer Überlagerungen von Fockzuständen studiert werden. Und eine besonders wichtige Klasse von solchen linearen Überlagerungen sind die sog *kohärenten Zustände*,

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,, \tag{11}$$

worin $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

(a) Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist Eigenvektor des Vernichtungsoperators zum Eigenwert α,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{12}$$

Im Folgenden verwenden wir geeignete Einheiten für Ort $\hat{q}$ und Impuls $\hat{p}$, so daß $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ mit $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Zeigen Sie:

(b) Erwartungswerte von Ort und Impuls im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ lauten

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \,, \tag{13}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \,, \tag{14}$$

(c) $|\alpha\rangle$ ist Zustand minimaler Unschärfe, $\Delta_\alpha q \Delta_\alpha p = 1/2$.

(d) Die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle$ ist eine um $\langle q\rangle$ zentrierte Gaussfunktion der Breite $1/\sqrt{2}$ und Phasenfaktor $e^{i\langle\hat{p}\rangle x}$.

Hinweis: Besinnen Sie sich auf die Vorlesung und wie da die Ortsdarstellung des Grundzustands gewonnen wurde.

(e) Studieren Sie nun die Dynamik des kohärenten Zustands eines harmonischen Oszillators. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der harmonische Oszillator in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, daß der harmonische Oszillator dann auch zu irgendeinem späteren Zeitpunkt in einem kohärenten Zustand ist. Bestimmen Sie die Amplitude $\alpha(t)$. Machen Sie sich ein Bild von $\alpha(t)$ (komplexe Ebene benutzen!) und $|\langle x|\alpha(t)\rangle|$. Genießen Sie die augenfällige Übereinstimmung mit dem Bild vom schwingenden Teilchen. Machen Sie sich klar, dass die komplexe α-Ebene im engen Zusammenhang mit dem klassischen Phasenraum steht.

Im Kontext der Elektrodynamik/Quantenoptik heißen Ort und Impuls Quadraturamplituden; "Ort" entspricht dabei der elektrischen Feldstärke, "Impuls" ihrer zeitlichen Ableitung. Der Operator $\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ heißt Photonenzahloperator. Zeigen Sie:

(f) Im kohärenten Zustand ist die Photonenzahl Poisson-verteilt,

$$P(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!\,; \tag{15}$$

(g) Erwartungswert und Quadratvarianz der Photonenzahl im kohärenten Zustand sind

$$\begin{aligned} \langle\hat{n}\rangle &= |\alpha|^2 && (16)\\ \Delta_\alpha^2 n &= |\alpha|^2 && (17) \end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 3 (Klassischer Grenzfall)** (8 Punkte)

Die Quantenmechanik geht, im Grenzfall großer Quantenzahlen, in die klassische Mechanik über. Wir bestätigen diese Aussage hier für den stationären Fall, indem wir für feste Energie E die klassische und quantenmechanische W'keitsdichte $P(x|E)$ vergleichen, und im Grenzfall großer Energien E finden $P^{\mathrm{kl}}(x|E) = P^{\mathrm{qm}}(x|E)$.

Für einen klassischen harmonischen Oszillator mit Energie E ist die stationäre W'keitsdichte

$$P^{\mathrm{kl}}(x|E) = \int_0^{2\pi} \delta(x - q_E(t;\phi))\frac{d\phi}{2\pi} \tag{18}$$

worin $q_E(t;\phi)$ allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung $m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0$ zur Energie E,

$$q_E(t;\phi) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\cos(\omega t - \phi)\,. \tag{19}$$

(a) Begründen Sie warum (18) für den Vergleich mit der Quantenmechanik eine gute Wahl ist.

(b) Berechnen Sie das Integral, und bestätigen Sie

$$P^{\mathrm{kl}}(x|E) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{{x_E^{\mathrm{kl}}}^2 - x^2}}\,, \quad \text{für} \quad |x| < x_E^{\mathrm{kl}} := \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \tag{20}$$

und $P^{\mathrm{kl}}(x|E) = 0$ für $|x| > x_E^{\mathrm{kl}}$. Machen Sie sich ein Bild! Welche Bedeutung hat x_E^{kl}?

Für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator im stationären Zustand $\varphi_n \propto H_n(x/b)e^{-(x/b)^2/2}$, $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ist zunächst

$$P^{\mathrm{qm}}(x|E) = |\varphi_n(x)|^2 \tag{21}$$

wobei die Quantenzahl n und Energie E verknüpft sind $E = \hbar\omega(n + 1/2)$.

(c) Ausgehend von der Integraldarstellung (5) zeige man: Im Limes $n \to \infty$ ist asymptotisch

$$\varphi_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left(e^{i\phi(x)} + (-1)^n e^{-i\phi(x)}\right) \tag{22}$$

mit $p(x)$ sog *lokaler Impuls*,

$$p(x) = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} \tag{23}$$

und

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')dx'\,. \tag{24}$$

Hinweis: Für große n empfiehlt sich eine asymptotische Entwicklung von (5), Stichwort “Methode der stationären Phase” bzw “Sattelpunktsmethode”.

(d) Die asymptotische Lösung (22) ist ein Produkt einer langsam veränderlichen Amplitude und einer schnell oszillierenden trigonometrischen Funktion. Durch Mittelung der Dichte $|\varphi_n(x)|^2$ über eine kleine Strecke $\Delta x \gg \hbar/p$ zeigen Sie

$$\overline{|\varphi_n(x)|^2} \sim P^{\mathrm{kl}}(x|E) \tag{25}$$

▷ **Aufgabe 4 (Anharmonischer Oszillator)** (10 Punkte)

Gegeben der anharmonische Oszillator,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \frac{1}{4!}\tilde{g}\hat{q}^4 \tag{26}$$

worin $\tilde{g}$ “kleiner” Parameter.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\vec{H}$ in führender Ordnung Störungstheorie. (5P)

(b) Schätzen Sie die Korrekturen zur nächsten Ordnung jenseits der führenden Ordnung ab. (3P)

(c) Für welche Parameterwerte $\tilde{(g)}$ darf die Anharmonizität $\propto \hat{q}^4$ als “kleine Störung” behandelt werden? (2P)

Hinweis: Es empfiehlt sich, erst einmal alles auf Harmonische Oszillator Leiteroperatoren umzuschreiben.

▷ **Aufgabe 5** Ritz'sches Theorem] (4 Punkte)

Beweisen Sie das Ritz'sche Theorem wonach das Funktional $E[\psi] = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$ genau dann stationär, $\delta E[\psi] = 0$, wenn $\psi = \psi_0$ Eigenvektor von $\hat{H}$. Schliessen Sie aus diesem Theorem $E[\psi] \geq E_g$, wobei E_g die Grundzustandsenergie.