Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SS 2010) -

Übungsblatt 09&10 (40 Punkte)

Ausgabe 16.06.10 – Abgabe 28.06.10 – Besprechung n.V.

▷ **Aufgabe 1 (H_2^+-Molekül)** (4 Punkte)

[“Pflicht”: Nachtrag Störungstheorie]

Das einfachste Molekül der Welt ist das einfach ionisierte Wasserstoff-Molekül H_2^+. In der Born-Oppenheimer Näherung nimmt man an, dass sich die beiden Protonen in einem festen Abstand R voneinander befinden. Ordnet man das Elektron einem der beiden Protonen zu – etwa Proton 1 – und vernachlässigt die Coulombwechselwirkung mit dem jeweils anderen Proton – im Beispiel wäre das Proton 2 – so wäre der Grundzustand ψ_1 eine am Ort des Proton 1 lokalisierte Exponentialfunktion. Allerdings hat der Zustand ψ_2 (eine am Ort des Protons 2 lokalisierte Expnentialfunktion) die gleiche Energie (nämlich welche?) – der “ungestörte” Grundzustand ist entartet.

Die “Störung” – im vorliegenden Fall die Coulombwechselwirkung mit dem jeweils anderen Proton – hebt diese zweifache Entartung auf. Ihre Aufgabe ist es, die Energieaufspaltung als Funktion des Abstandes der beiden Protonen zu berechnen und sich davon zu überzeugen, dass im Falle einer geraden Kombintion $\propto \psi_1 + \psi_2$ ein gebundener Zustand bei einem gewissen R_0 möglich ist, nicht aber für die ungerade Kombination $\propto \psi_1 - \psi_2$.

Von der Fein- und Hyperfeinwechselwirkung dürfen Sie in dieser Aufgabe getrost absehen. Die waren in der Vorlesung ja offiziell “noch nicht dran” ...

▷ **Aufgabe 2 (Asymptotische Entwicklung)** (4 Punkte)

[Diese Aufgabe ist “freiwillig” – falls Sie mal eine rechenbare Aufgabe zum Begriff der asymptotischen Entwicklung brauchen ...]

Betrachte

$$f(x) := \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t} dt \tag{1}$$

für $x > 0$. Wir interessieren uns für große x.

(a) überzeugen Sie sich davon, dass das Integral für jeden Wert $x > 0$ existiert. Für $x \to 0$ entwickelt es eine logarithmische Singularität. Da wir hier aber am Grenzwert $x \to \infty$ interessiert sind, soll uns das nicht interessieren ...

(b) Finden Sie, beispielsweise durch partielle Integration, eine Darstellung von $f(x)$ als Potenzreihe in $1/x$. Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

(c) Bezeichnen Sie die Approximation bis zur Ordnung $1/x^n$ (einschl.) mit σ_{n+1}. Beweisen Sie

$$|f(x) - \sigma_{n+1}(x)| \leq (n-1)!/x^n \tag{2}$$

und schließen Sie daraus, dass $\sigma_n(x)$ die asymptotische Entwicklung von $f(x)$. Für gegebenen Wert von x – bis zu welcher Ordnung n sollte man die asymptotische Entwicklung treiben?

Bemerkung: Asymptotische Entwicklungen spielen in allen Bereichen der Physik eine hervorragende Rolle. In der Quantenmechanik, beispielsweise, generiert die Entwicklung in Potenzen von $\hbar$ (WKB-Näherung) eine asymptotischen Entwicklung.

▷ Aufgabe 3 (1D Punktladung im homogenen Feld – stationär) (4 Punkte)

[“Pflicht” ...]

Betrachten Sie eine Punktladung im homogenen elektrischen Feld.

(a) Wie lautet der Hamiltonoperator (i) in Ortsdarstellung, (ii) in Impulsdarstellung? (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie: Die stationäre Schrödingergleichung zu (a) liest sich nach Separation der Bewegung senkrecht zum Feld, in dimensionslosen Einheiten, bei geeigneter Wahl des Koordinaten-Ursprungs und des Energienullpunkts

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - x\psi(x) = 0\,. \tag{3}$$

Wie lautet diese Gleichung in der Impulsdarstellung?

(c) Lösen Sie die Gleichung (3), d. h. finden Sie einen Ausdruck für $\psi(x)$ mit dem man was anfangen kann.

Hinweis: Arbeiten Sie zunächst in der Impulsdarstellung.

(d) Wie verhält sich $\psi(x)$ für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?

Hinweis: Berechnen Sie das Fourierintegral mit der Sattelpunktsmethode (Sattelpunktsmethode nie gehört? Nachgucken, oder jemanden fragen ...)

Allgemeiner Hinweis: Konsultieren ihr Leib-und-Magen Buch zu speziellen Funktionen der mathematischen Physik unter dem Stichwort Airy-Funktionen; empfehlenswert: Abramowitz und Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Übrigens – der Begriff “Airy-Funktion” wird auch in der Experimentalphysik – genauer: Optik – in einer völlig anderen Bedeutung verwendet ...

▷ Aufgabe 4 (1D Punktladung im homogenen Feld – Dynamik) (5 Punkte)

[Freiwillig – falls Sie mal was rechnen wollen ...]

In Fortsetzung der vorangegangenen Aufgabe studieren wir jetzt die Dynamik der Punktladung im elektrischen Feld. Die elektrische Kraft, die das Teilchen erfährt, sei bezeichnet F.

(a) Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung schreiben lässt

$$\tilde{\Psi}(k,t) = \tilde{\Psi}_0(k - Ft/\hbar)\exp\left\{-\frac{i\hbar t}{2m}\left(k^2 - \frac{F}{\hbar}kt + \frac{F^2}{3\hbar^2}t^2\right)\right\}\,, \tag{4}$$

worin $\tilde{\Psi}_0(k)$ Anfangswert, also Impulswellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$.

(b) Sei nun $\tilde{\Psi}_0$ eine Gaussfunktion,

$$\tilde{\Psi}_0 = \left[\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}^2}\right]^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{(k-k_0)^2}{4\tilde{\sigma^2}} + ix_0k\right\} . \tag{5}$$

Was ist die Bedeutung der Parameter $\tilde{\sigma}$, k_0, x_0?

(c) Berechnen Sie, soweit m¨glich $\Psi(x,t)$ – die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung zum Anfangswert (5). Machen Sie sich ein Bild!

▷ **Aufgabe 5 (Baker-Campbell-Hausdorff)** (5 Punkte)

[Freiwillig – und äußerst nützlich fr die Theorie der Liegruppen ...]

Gegeben zwei lineare Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, deren Kommutator $\hat{C} := [\hat{A},\hat{B}]$ mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutiert, $[\hat{A},\hat{C}] = [\hat{B},\hat{C}] = 0$.

(a) Zeigen Sie für eine genügend gutartige Funktion $f(\cdot)$

$$e^{\hat{A}} f(\hat{B}) e^{-\hat{B}} = f\left(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}\right) \tag{6}$$

Hinweis:Benutze Taylorentwicklung von $f(x)$ um $x = 0$. Benutze $\hat{1} = e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}}$ für $e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}} = (e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})^n$.

(b) Zeigen Sie nun

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \hat{C} + \frac{1}{2!}[\hat{A},\hat{C}] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{C}]] + \frac{1}{4!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{C}]]] + \ldots \tag{7}$$

Hinweis: Betrachte die Operatorschar $\hat{F}(\theta) := e^{\theta\hat{A}}\hat{B}e^{-\theta\hat{A}}$. Taylerentwicklung um $\theta = 0$ generiert Potenzreihe in $\hat{A}$ deren Wert für $\theta = 1$ interessiert. Offensichtlich $\hat{F}(0) = \hat{B}$. Terme erster und höherer Ordnung folgen aus $d\hat{F}/d\theta = [\hat{A},\hat{F}]$.

(c) Zeigen Sie schließlich

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\hat{C}/2} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\hat{C}/2} \tag{8}$$

Hinweise: Betrachte Operatorschar $\hat{F}(\theta) = e^{\theta(\hat{A}+\hat{B})}$ und versuche $\hat{F}(\theta)$ in der Form $\hat{F}(\theta) = e^{p\hat{A}}e^{q\hat{B}}e^{r\hat{C}}$ mit θ-abhängigen Koeffizienten $p = p(\theta)$ etc. zu schreiben. Vergleiche (und löse) dazu die Differentialgleichungen $d\hat{F}/d\theta$ der beiden Schreibweisen.

▷ **Aufgabe 6 (Glaubers Verschiebeoperator)** (5 Punkte)

["Frewillig" – gut für weiterführende Vorlesungen in Quantenoptik / Quanteninformation ...]

Gegeben seien die Leiteroperatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ eines harmonischen Oszillators, dh. $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \hat{1}$. Fürderhin sei

$$\hat{D}(\alpha) := \exp\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\} \tag{9}$$

mit α komplex. Zeigen Sie:

(a) $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha)$, das heißt $\hat{D}(\alpha)$ ist unitär.

(b) Die normalgeordnete Form (alle Vernichter stehen rechts) lautet

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \, . \tag{10}$$

<u>Hinweis:</u> Besinnen Sie sich beizeiten auf das Baker-Campbell-Hausdorff Theorem (8).

(c) $\hat{D}(\alpha)$ bewirkt Verschiebungen,

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \, . \tag{11}$$

<u>Hinweis:</u> Auch hier sind die Einsichten zum BCH hilfreich ....

(d) $\hat{D}(\alpha)$ macht aus dem Grundzustand (im Kontext Elektordynamik: Vakuumzustand) einen kohärenten Zustand,

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle \, . \tag{12}$$

▷ Aufgabe 7 (W'keitsstromdichte Punktladung) (4 Punkte)

["Pflicht" und Klausurrelevant ...]

Zeigen Sie: Für eine Punktladung im elektromagnetischen Feld gilt die Kontinuitätsgleichung $\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ mit einer W'keitsstromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] - \frac{e}{m} \vec{A}(\vec{x}, t) |\psi(\vec{x}, t)|^2 \, . \tag{13}$$

Frage: ist die W'keitsstromdichte eichinvariant (sieht ja nicht so aus ...)?

▷ Aufgabe 8 (Geschwindigeitsoperator) (3 Punkte)

[Freiwillig – aber eine gute Übung für den Umgang mit Kommutatoren ...]

In Anlehnung an die klassische Mechanik ist der quantenmechanische Geschwindigkeitsoperator definiert

$$\hat{\vec{v}} := \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{\vec{q}} \right] \, . \tag{14}$$

wobei $\hat{\vec{q}}$ den Ortsoperator und $\hat{H}$ den Hamiltonoperator bezeichnet. Für ein Teilchen der Masse m und Ladung e im elektromagnetischen Feld,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}}, t) \right]^2 + e\Phi(\hat{\vec{q}}, t) \, . \tag{15}$$

worin $\Phi, \vec{A}$ das Potential des Feldes.

Zeigen Sie

(a)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{1}{m} \left[\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right] \, . \tag{16}$$

(b)

$$[\hat{q}_i, \hat{v}_j] = i \frac{\hbar}{m} \delta_{ij} \tag{17}$$

worin $i, j = x, y, z$ kartesischer Index.

(c)

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = i\frac{\hbar e}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k \tag{18}$$

wobei ϵ_{ijk} den vollständig antisymmetrischen Einheitstensor bezeichnet, und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (Magnetfeld).

<u>Bemerkung:</u> Zuweilen wird diese Identität in der Form $\hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{v}} = i\hbar e/(m^2)\vec{B}$ notiert.

▷ **Aufgabe 9 (Bewegung im Magnetfeld/Quanten-Hall-Effekt)** ($e\pi$ Punkte)

[Freiwillig – und ein ziemlicher Brummer ...]

Wir betrachten ein geladenes Punktteilchen (Masse m, Ladung e) im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{q}})\right]^2 , \tag{19}$$

mit $\frac{\partial}{\partial \hat{\vec{q}}} \times \vec{A} = \vec{B}$.

(a) Stellen Sie die *klassischen* Bewegungsgleichungen auf, lösen Sie sie, und verifizieren Sie, daß sich das Teilchen mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \tag{20}$$

auf einer Kreisbahn bewegt. Was ist die Energie des Teilchens?

(b) Definieren Sie Operatoren

$$\hat{X}_0 = \hat{q}_x + \hat{v}_y/\omega_c , \tag{21}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{q}_y - \hat{v}_x/\omega_c , \tag{22}$$

wobei $\hat{\vec{v}}$ der in Aufgabe (1) definierte Geschwindigkeitsoperator ist. Beweisen Sie

$$\left[\hat{H}, \hat{X}_0\right] = 0 , \tag{23}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{Y}_0\right] = 0 , \tag{24}$$

$$\left[\hat{X}_0, \hat{Y}_0\right] = -i\frac{e}{|e|}a_m^2 , \tag{25}$$

wobei $a_m = [\hbar/(|e|B)]^{1/2}$ die sog. *magnetische Länge* bezeichnet. Was ist die physikalische Bedeutung der Operatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$?

<u>Hinweis:</u> Die physikalische Bedeutung erkennen Sie nach einem kurzen Blick auf Ihre Lösung von (a). Übrigens: X_0, Y_0 nennt man auch *Orbitzentrumskoordinaten* ...

(c) Beweisen Sie die Unschärferelation der Orbitzentrumskoordinaten

$$\delta X_0 \delta Y_0 \geq \frac{1}{2}a_m^2 . \tag{26}$$

Behalten Sie in Erinnerung: ein geladenes Teilchen im Magentefeld beansprucht eine Fläche umgekehrt proportional dem Magnetfeld.

(d) Drücken Sie den Hamiltonoperator (19) durch den in Aufgabe (1) definierten Geschwindigkeitsoperator aus. Benutzen Sie die Algebra des Geschwindigkeitsoperators um die Eigenwerte von $\hat{H}$ zu bestimmen, (2 Punkte)

$$E_n(v_z) = (n + 1/2)\hbar|\omega_c| + mv_z^2/2\,. \tag{27}$$

Hinweis: $\hat{H}$ ist quadratisch in $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ wobei der Kommutator von $\hat{v}_x$ und $\hat{v}_y$ dem kanonischen Kommutator eines 1D Punktteilchens gleicht … offensichtlich hat man es bei der Bewegung in der xy-Ebene formal mit einem harmonischen Oszillator zu tun.

(e) Um auch die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ zu bestimmen wählen Sie die sog *Landau-Eichung* $A_x = -yB$, $A_y = A_z = 0$. Lösen Sie die dazugehörige stationäre Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung.

(f) In der Landau-Eichung lauten die Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{N} e^{i(k_x x + k_z z)}\, H_n((y - y_0)/a_\mathrm{m})\, e^{-(y-y_0)^2/a_\mathrm{m}^2}\,, \tag{28}$$

wobei $y_0 = -\hbar k_x/(eB)$, $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante, und H_n Hermitepolynom. Was ist die Bedeutung der Quantenzahlen k_x, k_z, n?

Hinweis: Studieren Sie die Orbitzentrumsoperatoren $\hat{X}_0$, $\hat{Y}_0$ in der Landau-Eichung …

(g) Schätzen Sie die Entartung der Landauniveaus (27) für ein großes System mit periodischen Randbedingungen ab. Vielleicht lassen Sie sich von den in (c) gesammelten Erfahrungen inspirieren …

Bemerkung: Das in dieser Aufgabe studierte System spielt eine wichtige Rolle beim sog. *Quanten-Hall Effekt*. Eine gute Einführung vermittelt M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath und J. Hajdu *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (1994).

▷ Aufgabe 10 (Diracs Ladungsquantisierungsargument)

[Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie dient ausschließlich ihrer Bildung …]

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik hat Dirac auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Eichinvarianz der Quantenmechanik und der Quantisierung der elektrischen Ladung hingewiesen: wenn es nur einen *einzigen* magnetischen Monopol auf dieser Welt gibt, und die Quantenmechanik die theoretischen Grundlagen dieser Welt formuliert, so ist die elektrische Ladung notwendigerweise quantisiert.

Ein magnetischer Monopol der Stärke g gibt Anlass zu einer magnetischen Flussdichte $\vec{B}_g$; für einen im Ursprung plazierten Monopol

$$\vec{B}_g(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{29}$$

worin $r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ radialer Einheitsvektor.

(a) Machen Sie sich mal ein Bild!

(b) Bestätigen Sie

$$\mathrm{div}\vec{B}_g = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \tag{30}$$

(c) In Gebieten, die den Aufenthaltsort des Monopols nicht umfassen, sollte es also ein Vektorpotential $\vec{A}$ geben, vermittels dessen $\vec{B}_g = \mathrm{rot}\vec{A}$. Wegen div rot = 0 wäre in solchen Gebieten dann $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ garantiert, wie gefordert. Bestätigen Sie

$$\vec{A}_\mathrm{I} = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{31}$$

wie gewünscht $\mathrm{rot}\vec{A}_\mathrm{I} = \vec{B}_g$. Da $\vec{A}_\mathrm{I}$ für $\vartheta \to \pi$ aber divergiert, ist hier für den Definitionsbereich D_I von $\vec{A}_\mathrm{I}$ ein nach unten offener Kegel $\pi \geq \vartheta > \pi - \varepsilon$ aus dem $\mathbb{R}^3$ auszuschließen.

(d) Bestätigen Sie, dass auch

$$\vec{A}_\mathrm{II} = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \tag{32}$$

$\mathrm{rot}\vec{A}_\mathrm{II} = \vec{B}$ liefert, allerdings ist nun für den Definitionsbereich D_II aus dem $\mathbb{R}^3$ ein nach oben offener Kegel $0 \leq \vartheta < \varepsilon$ auszuschließen.

(e) Auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche unterscheiden sich die beiden Potentiale

$$\vec{A}_\mathrm{II} - \vec{A}_\mathrm{I} = -\frac{2g}{4\pi}\frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi\,. \tag{33}$$

Bestätigen Sie, dass der Unterschied ein Gradient ist,

$$\vec{A}_\mathrm{II} - \vec{A}_\mathrm{I} = \mathrm{grad}\chi \tag{34}$$

mit

$$\chi = -\frac{2g}{4\pi}\varphi\,. \tag{35}$$

(f) Wellenfunktionen sind über eine Eichtrafo verknüpft,

$$\psi_\mathrm{II} = \exp\left\{-i\frac{2eg}{4\pi\hbar}\varphi\right\}\psi_\mathrm{I}\,. \tag{36}$$

Die Verknüpfung ist allerdings mehrdeutig. Bestätigen Sie, dass Eindeutigkeit nur garantiert ist, sofern

$$\frac{2eg}{4\pi\hbar} = n\,, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{37}$$

Lies: gibt es einen Monopol der Stärke g ist die elektrische Ladung quantisiert mit Elementarladung $e \propto 1/g$ (und vice versa).

In der E-Dyn Vorlesung haben Sie gelernt $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Streng genommen kann das nur für die von uns zugänglichen Raumbereiche behauptet werden – das Praktiksumlabor, etwa. Ob auch auf dem Sirius $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ steht in den Sternen.

▷ **Aufgabe 11 (Paulimatrizen und Spin-**$1/2$**)** (8 Punkte)

["Pflicht" und partiell Klausurrelevant ...]

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_a = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_a\,, \qquad a = x, y, z \tag{39}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra.
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_a$, bzw. $\hat{s}_a$, als kartesische Komponenten eines Euklidischen Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung?

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_a$, $a = x, y, z$ gilt:

$$\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b = i\hat{\sigma}_c\,, \qquad \hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c = i\hat{1}\,, \qquad (abc = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{40}$$

(d) Es sei $\vec{a}$ ein Euklidischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\vec{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{41}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet.

(e) Was sind die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$?

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β?

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte dürfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden?

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen?

▷ **Aufgabe 12 (Noch mehr Spinologie ...)** (2 Punkte)

["Freiwillig", aber nützlich, und möglicherweise klausurrelevant ...]

Betrachte den Operator

$$\hat{U}_{\phi\vec{n}} := \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\phi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}\right\} \tag{42}$$

wobei $\vec{n}$ Euklidischer Einheitsvektor, ϕ reell und $\hat{\vec{s}}$ der Spinvektoroperator eines Spin-1/2 Teilchens.

Wie lautet $\hat{U}$ in der Standard-Matrixdarstellung?

Hinweis: Sie werden sich doch an die Reihendarstellung der e-Funktion erinnern? Möglicherweise auch an $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$? Und wenn Sie sich jetzt noch (41) vergegenwärtigen sind Sie auch schon fertig ...

▷ Aufgabe 13 (HO mit Heisenberg) (4 Punkte)

["Pflicht" und klausurrelevant ...]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq \tag{43}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an.

Hinweis: Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2}q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 14 (Ehrenfest'sches Theorem) (6 Punkte)

["Pflicht" – und klausurrelevant ...]

Bewegen sich die Zustände, so bewegen sich auch die Erwartungswerte. Für den Massepunkt mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ gilt hier das

Satz (Ehrenfest'sches Theorem I) Die klassische Bewegungsgleichung der Newton'schen Mechanik gilt *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{F}\rangle \tag{44}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial\hat{q}}\,. \tag{45}$$

Beweisen Sie das Ehrenfestsche Theorem I. Genießen Sie anschließend die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton'sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle\hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise:

Satz (Ehrenfest'sches Theorem II) Für genügend langsam veränderliche Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\delta_\psi^2 q F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{46}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle \hat{q} \rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$.

Auch dieses Theorem bitten wir Sie zu beweisen. "Genügend langsam veränderlich" heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle \hat{q} \rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ **Aufgabe 15 (Spin Präzession)** (10 Punkte)

["Pflicht", irgendwann im Leben muss man's machen, warum also nicht jetzt ...]

Die Wechselwirkungsenergie eines Spins $\boldsymbol{s}$ mit gyromagnetischem Verhältnis γ im Magnetfeld $\vec{B}(t)$ lautet

$$H(t) = -\gamma \hat{\vec{s}} \cdot \vec{B}(t) \tag{47}$$

(a) Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen des Spins auf. Abgesehen von den Hüten in Ihren Gleichungen – woran fühlen Sie sich erinnert? (4 Punkte)

(b) Lösen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für ein magnetisches Wechselfeld $B_x = b\cos(\omega t), B_y = b\sin(\omega t), B_z = B$ worin b und B Konstanten. Um Ihnen Tinte zu sparen, und uns das Korrigieren nicht zu erschweren, arbeiten Sie bitte mit den Paulioperatoren, und benutzen Sie bitte folgende Abkürzungen (6 Punkte)

$$\omega_0 := -\gamma B \,, \qquad \omega_1 := -\gamma b \,. \tag{48}$$

<u>Hinweis:</u> Um die explizite Zeitabhängigkeit der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen los zu werden empfiehlt sich die Transformation in ein Wechselwirkungsbild. Als Erzeugende empfehlen wir $a\hat{\sigma}_z$, wobei a so zu wählen, dass die resultierenden Bewegungsgleichungen keine explizite Zeitabhängigkeit mehr aufweisen ...

Ach ja – denken Sie auch hier an das Klima, und benutzen abkürzend

$$\delta := \omega_0 - \omega \,, \qquad \Omega := \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} \,. \tag{49}$$

(c) Der Spin sei anfänglich vollständig in z-Richtung polarisiert. Zeigen Sie, dass bei einer Messung zur Zeit t der Spin mit W'keit

$$P(t) = \frac{\omega_1^2}{\delta^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \tag{50}$$

umgeklappt vorgefunden wird. (3 Punkte)

<u>Hinweis:</u> Plotten Sie doch mal $P(t)$ für verschieden Werte der Verstimmung δ. Sehen Sie, dass Sie hier eine experimentelle Methode haben um das Gyromagnetische

Verhältnis γ zu bestimmten? Gut! Rabi hat 1939 mit dieser Methode das magnetische Moment des Protons mit hchster Präzision bestimmt – was im Jahre 1944 mit dem Nobelpreis belohnt wurde, und die Frequenz Ω zur Rabi-Frequenz beförderte. Heutzutage bevölkert die Kernspinresonanztechnik nicht nur die Labore und Praktika der Physik, sondern findet vielfach Anwendungen in Medizin und Technik. Mit den neuesten Geräten kann man dabei sogar dem menschlichen Gerhirn in Echtzeit beim Denken zusehen ...

▷ **Aufgabe 16 ($\hbar$ im Labor ...)** (π Punkte)

[Freiwillig – aber unterhaltsam ...]

Angenommen Sie haben gerade ein Doppelspaltexperiment zum Nachweis von Materiewellen aufgebaut. Erste Probeläufe mit monochromatischen Teilchen ergeben einen Streifenabstand a. Sie lassen das Experiment über Nacht laufen und gehen zu Bett. Am nächsten Morgen lesen Sie in der Zeitung, jemand habe über Nacht den Wert von $\hbar$ geändert, alle anderen Naturkonstanten (Elementraladung e, Lichtgeschwindigkeit c etc) jedoch nicht angerührt. Auf dem Weg zum Labor kommen Sie zu der Überzeugung, eine Änderung von $\hbar$ müsse sich in einem veränderten Streifenabstand niederschlagen. "Schließlich" – so Ihr Argument – "bedeute die De-Broglie Beziehung $\lambda = 2\pi\hbar/p$ eine lineare Abängigkeit der Wellenlänge, und damit des Streifenabstandes, von $\hbar$." Vor dem Labor angekommen plagen Sie leise Zweifel. Endgültige Gewissheit bringt nur ein Blick auf die Messdaten – und die besagen WAS?

Bemerkung: Beachten Sie, daß sich bei Änderung von $\hbar$ alle möglichen Dinge ändern, beispielsweise die Größe eines Atoms (gemessen relativ – zu was?). Das einzige was sich sicherlich nicht ändert ist der Wahrheitsgehalt von Aussagen wie "In dieser Kiste befinden sich 17 Kartoffeln".

Sie dürfen sich auch ruhig mal den Spaß machen, andere PhysikerInnen mit der Frage zu belästigen. Machen Sie aber nicht den Fehler, und übernehmen deren Antwort um Ihre π Punkte abzusahnen. Die Antworten sind nämlich vermutlich falsch (es sei denn, sie sind richtig).