Theoretische Physik III
- Quantenmechanik (SS 2010) -

Übungsblatt 11&12 ($40+\pi$ Punkte) [1]

Ausgabe 06.07.10 – Abgabe 20.07.10 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Spin-Multipletts) (4 Punkte)

[Klausurrelevant]

Bei der Kopplung zweier Spin-1/2 sind Ihnen das Spin-Singlett

$$|00\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\uparrow_z\rangle\right) \tag{1}$$

und Spin-Triplett begegnet,

$$\begin{aligned} |1,-1\rangle &= |\downarrow_z\downarrow_z\rangle\,, & (2)\\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\downarrow_z\rangle + |\downarrow_z\uparrow_z\rangle\right) & (3)\\ |1,+1\rangle &= |\uparrow_z\uparrow_z\rangle\,. & (4) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Singlett ist invariant unter Drehungen. Alternnativ

$$|\uparrow_a\downarrow_a\rangle - |\downarrow_a\uparrow_a\rangle = |\uparrow_b\downarrow_b\rangle - |\downarrow_b\uparrow_b\rangle \tag{5}$$

worin $|\uparrow_a\rangle$ Eigenzustand von $\hat{\sigma}_a := \vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ zum Eigenwert $+1$, und $\vec{a}$ normierter Euklidischer Einheitsvektor in "a-Richtung" (dito für b).

(b) Das Triplett transformiert wie die (zirkulare) Basis eines drei-dimensionalen Euklidischen Vektorraums (den Sie mit dem Raum der "Ortsvektoren" identifizieren dürfen).

▷ Aufgabe 2 (Addition von Bahndrehimpuls und Spin-$\frac{1}{2}$) (4 Punkte)

[Ein Muss in der QM-I Vorlesung ...]

Wird beim Wasserstoffproblem auch der Spin der Elektrons berücksichtigt ist mit

$$\hat{\vec{j}} := \hat{\vec{\ell}} + \hat{\vec{s}} \tag{6}$$

der Gesamtdrehimpuls des Elektrons verabredet.

Gemeinsame Eigenzustände zu $\hat{\vec{j}}^2$, $\hat{j}_z$, $\hat{\vec{\ell}}^2$ und $\hat{\vec{s}}^2$ werden notiert $|jm_j\ell s\rangle$, wenn nötig Kommata zwischen den Einträgen, worin Quantenzahlen j, m_j, ℓ und s definitiosgemäß

$$\begin{aligned} \hat{\vec{j}}^2|jm_j\ell s\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm_j\ell s\rangle\,, & \hat{j}_z|jm_j\ell s\rangle &= \hbar m_j|jm_j\ell s\rangle\,,\\ \hat{\vec{\ell}}^2|jm_j\ell s\rangle &= \hbar^2\ell(\ell+1)|jm_j\ell s\rangle\,, & \hat{\vec{s}}^2|jm_jls\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|jm_jls\rangle\,, \end{aligned} \tag{7}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Der Wert von s liegt natürlich fest, $s = \frac{1}{2}$, der Wertebereich von ℓ ist variabel $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Zu jedem ℓ (mit Ausnahme $\ell = 0$) gibt es zwei mögliche Werte $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Für $\ell = 0$ gibt es nur ein $j = \frac{1}{2}$.

Das Ziel ist es, die $|jm_j ls\rangle$ durch eine Linearkombination der Produktzustände $|\ell m_\ell; s\mu\rangle := |\ell m_\ell\rangle \otimes |s\mu\rangle$ auszudrücken, wobei Quantenzahlen m_ℓ und μ definitionsgemäß $\hat{\ell}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar m_\ell|\ell m_\ell s\mu\rangle$, $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$, und $\hat{s}_z|\ell m_\ell s\mu\rangle = \hbar\frac{\mu}{2}|\ell m_\ell s\mu\rangle$ mit $\mu = \pm 1$. In jedem Fall $m_j = -j, -j+1, \ldots, j$.

Zeigen Sie: Für $\ell = 1, 2, \ldots$

$$|\ell \pm \tfrac{1}{2}, m_j; \ell, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \mp \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\pm\rangle \pm \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m_j}{2\ell + 1}}|\ell, m_j \pm \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\mp\rangle \quad (8)$$

und für $\ell = 0$

$$|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}; 0\tfrac{1}{2}\rangle = |0, 0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\pm\rangle \,. \quad (9)$$

Spektroskopisch notiert man die m_j-Multipletts in der Form $n\ell_j$, etwa $2p_{\frac{1}{2}}$ oder $2p_{\frac{3}{2}}$. In der Grobstruktur ("Kepler-Atom") sind diese beiden Niveaus anergetisch entartet. Wird die Wechselwirkung des Spins mit dem Bahndrehimpuls in der Feinstruktur erfasst, wird diese Entartung aufgehoben.

▷ Aufgabe 3 (Hyperfeinstruktur) (4 Punkte)

[Was die HFS ist. und wo sie herkommt, sollte man wissen . . .]

In der Hyperfeinstruktur (HFS) wird die Wechselwirkung zwischen dem Elektronenspin und dem Protonenspin (Fall: atomarer Wasserstoff) berücksichtigt. Das magnetische Moment des Protons, $\vec{\mu}_\mathrm{p} = \gamma_\mathrm{p}\vec{s}_\mathrm{p}$, $\gamma_p \approx 2,79 e_0/m_\mathrm{p}$, erzeugt am Ort $\vec{x}$ ein Magnetfeld

$$\vec{B}_\mathrm{p}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\vec{\mu}_\mathrm{p} - 3\frac{(\vec{\mu}_\mathrm{p}\cdot\vec{x})\vec{x}}{r^2}\right) + \frac{2\mu_0}{3}\vec{\mu}_\mathrm{p}\delta(\vec{x}) \,. \quad (10)$$

wobei angenommen wurde, dass das Proton im Ursprung plaziert ist, und $r = |\vec{x}|$.

Die Einstellenergie des magnetischen Moments des Elektrons, $\mu_\mathrm{e} = -\gamma_\mathrm{e}\vec{s}_\mathrm{e}$, $\gamma_\mathrm{e} = e_0/m_\mathrm{e}$ (Annahmen: $g = 2$), lautet

$$\hat{H}_\mathrm{HFS} = -\hat{\vec{\mu}}_\mathrm{e}\cdot\vec{B}_\mathrm{p}(\hat{\vec{q}}) \quad (11)$$

Um den Effekt auf den Grundzustand von Wasserstoff abzuschätzen behandeln wir $\hat{H}_\mathrm{HFS}$ hinsichtlich der Translationsfreiheitsgrade des Elektrons in erster Ordnung Störungstheorie, behalten aber die Spinfreihtsgrade bei. Bei der Mittlung des Magnetfeldes über die Gewichtsfunktion $|\psi_{100}(\vec{x})|^2$ trägt nur der Kontaktterm bei (warum?), und daher

$$\hat{H}_\mathrm{HFS} = -\frac{2\mu_0}{3}\hat{\vec{\mu}}_\mathrm{e}\hat{\vec{\mu}}_\mathrm{p}|\psi_{100}(0)|^2 = \frac{A}{\hbar^2}\hat{\vec{s}}_\mathrm{e}\cdot\hat{\vec{s}}_\mathrm{p} \quad (12)$$

worin

$$A = \frac{16}{3}\times 2,79\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\alpha^2 E_\mathrm{Ry} \approx 5,87\times 10^{-6}\mathrm{eV}\,. \quad (13)$$

bzw $\nu = A/h \approx 1417\mathrm{MHz}$ oder $\lambda = c/\nu \approx 21\mathrm{cm}$.

(a) Zeigen Sie dass der Hamiltonoperator (12) zu Eigenwerten und Eigenzuständen Anlass gibt

$$\begin{array}{ll} E_+ = E_0 + A/4 & \text{im Triplet } |S=1, M\rangle,\ M = -1, 0, 1\,, \\ E_- = E_0 - 3A/4 & \text{im Singlet } |S=0, M=0\rangle\,. \end{array} \tag{14}$$

(b) In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ spaltet das Triplet auf und das Singlet wird verschoben. Berechnen Sie – exakt! – diese Aufspaltung/Verschiebung als Funktion der Magnetfeldstärke (die Kopplung des Protonenspins an das Feld dürfen Sie dabei getrost vernachlässigen. Warum?). Machen Sie sich ein Bild (Energiewerte vs B), identifizieren das "Zeeman-Regime" kleiner Feldstärken und das Paschen-Back Regime großer Feldstärken.

Bemerkung: Die Hyperfeinstruktur im Grundzustand von atomarem Wasserstoff spielt in der Astrophysik eine wichtige Rolle (21cm-Linie), und wird gerne für Tests der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet (gravitative Rotverschiebung). Der Hyperfeinübergang im Cs-133 Isotop dient der Definition der Sekunde: eine Sekunde sind genau 9 192 631 770 Perioden der entsprechenden Linie. Der Übergang ist übrigens äußerst schwach, da elektrisch Dipol-verboten, mit einer Lebensdauer $\sim 3,5 \times 10^{14}$sec $\sim 10^7$Jahre (aufgrund magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolübergänge).

Im übrigen bezieht sich die Platte der Pionier 10 Mission, die die Nachricht von unserer Zivilisation ins All trägt, auf die Hyperfeinstruktur von atomarem Wasserstoff um eine Längen und Zeitskale zu kommunizieren ...

▷ Aufgabe 4 (Von-Neumann Reihe) (2 Punkte)

[Kein Muss in QM-I, aber immer wieder ntzlich ...]

Für zeitlich veränderlichen Hamiltonoperator $\hat{H}(t)$ ist der unitäre Propagator

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, \hat{H}(\tau)\right) \tag{15}$$

wobei $\mathcal{T}$ die Zeitordnung bedeutet: in der Entwicklung des nachfolgende Ausdrucks sind Produkte von Operatoren $\hat{H}(\tau_1)\hat{H}(\tau_2)$ derart zu ordnen, dass die zeitlich späteren zuerst kommen ($\tau_1 > \tau_2$).

Bestätigen Sie für (15) die Reihendarstellung in der sog *von-Neumann Reihe*

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}(\tau) d\tau + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \hat{H}(\tau_1)\hat{H}(\tau_2) + \ldots \tag{16}$$

▷ Aufgabe 5 (Atom-Licht Wechselwirkung) (6 Punkte)

[Ohne sich in Detalis zu velrieren sollte man "das Prinzip" drauf haben ...]

Wir betrachten die Wechselwirkung eines Kepleratoms mit einem klassischen Lichtfeld. Der Hamiltonoperator liest sich

$$\hat{H}(t) = \underbrace{\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\hat{\vec{q}}|}}_{:=\hat{H}_0} - \underbrace{e\hat{\vec{q}} \cdot \vec{E}(t)}_{:=-\hat{V}(t)} \tag{17}$$

worin $\vec{E}(t) = \vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t} + c.c$ die elektrische Feldamplitude am Ort des Atoms, und $e\hat{\vec{q}}$ das atomare Dipolmoment. Die Eigenwerte bzw Eigenvektoren des ungestörten Hamiltonoperators seien bezeichnet $E_{n\ell} = -mc^2\frac{\alpha^2}{2n^2}$ bzw $|n\ell m\rangle$, wobei $n = 1, 2, \ldots$, $\ell = 0, \ldots, n-1$, $m = -\ell, \ldots, \ell$ und α die Feinstrukturkonstante.

(a) Transformieren Sie die Schrödingergleichung $i\hbar|\dot{\Psi}\rangle = \hat{H}(t)|\Psi\rangle$ in ein Wechselwirkungsbild.

(b) Berechnen Sie in führender Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, das Atom, das sich anfänglich im Grundzustand $|100\rangle$ befinden möge, zum Zeitpunkt t in einem ersten angeregten Zustand $|11m = 0, \pm 1\rangle$ zu finden. Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten an für lineare Polarisation, $\vec{\mathcal{E}} \propto \vec{e}_z$, und für zirkulare Polarisationen $\vec{\mathcal{E}} \propto \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)$.

(c) Für den resonanten Fall $\omega \approx \omega_{21} := (E_{21} - E_{10})/\hbar$ ist die Störungstheorie nicht geeignet. Wie groß muss die Verstimmung $\delta_{21} := \omega_{21} - \omega$ mindestens sein, damit die Störungstheorie angewendet werden darf? Versuchen Sie, den resonanten Fall $\delta_{21} \approx 0$ zu analysieren (Stichwort: Zwei-Niveau Atom).

▷ **Aufgabe 6 (Zwei-Niveau Atom im Lichtfeld)** (6 Punkte)

[Für Freunde der exakt lösbaren Modelle ...]

Das "Zwei-Zustands System", auch genannt "zwei-Niveau Atom", "Spin im Magnetfeld" oder "qubit" ist charakterisiert durch einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basiszuständen $|e\rangle, |g\rangle$ (im Kontext Atomphysik) und einen Hamiltonoperator, der – in der sog *Drehwellennäherung* – formuliert werden kann

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}e^{i\omega t}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}e^{i\omega t}\hat{\sigma}^\dagger \tag{18}$$

worin $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$.[2]

(a) Welche physikalische Bedeutung haben die Erwartungswerte von $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger$ und $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$?

(b) Die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist natürlich unangenehm. Um damit fertig zu werden empfiehlt sich ein Wechselwirkungsbild mit "ungestörtem" Hamiltonoperator $\hat{H}_0 := \hbar\omega\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$. Wie transformiert sich $\hat{H}(t)$ unter diesem Bildwechsel? Ist es möglich, dass im Wechselwirkungsbild die Schrödingergleichung für den transformierten Zustand $|\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t)}|\psi(t)\rangle$ in etwa lautet $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$ mit

$$\tilde{H} = \hbar(\omega_0 - \omega) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma} + \frac{\hbar\Omega_0^*}{2}\hat{\sigma}^\dagger \tag{19}$$

(c) Für ein Atom das sich anfänglich im Grundzustand befindet bestimme man die W'keit, dass es zur Zeit t im angeregten Zustand gefunden wird.

[2]Die durch $\hat{H}$ beschriebene Dynamik haben Sie in Aufgabe 15, Blatt 09&10schon mal analysiert – Stichwort "Spin-Präzession".

▷ **Aufgabe 7 (Zenos Paradox)** (4 Punkte)

[Extrem Bildungsrelevant …]

Zeno von Elea, ein Vorsokratiker, ist bekannt für seine Paradoxe. Das bekannteste ist vermutlich “Achilles und die Schildkröte”: bei einem Wettrennen zwischen Achilles und der Schildkröte, bei dem der Schildkröte aus Gründen der Fairneß ein gewisser Vorsprung eingeräumt wird, kann Achilles die Schildkröte nie einholen, denn wann immer er da ankommt, wo die Schildkröte gerade noch war, ist sie schon weiter. Vermutlich haben Sie auch schon gelernt, dass spätestens seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung das Paradox keines mehr ist.

Ein anderes Paradox betrifft fliegende Pfeile – nach Zeno eine Unmöglichkeit: in jedem Moment seines Fluges nimmt der Pfeil einen bestimmten, exakt umrissenen Ort ein. Er ist dort in Ruhe, denn wer sich an *einem* Ort befindet kann sich schließlich nicht bewegen (Bewegung ist “Betreten” oder “Verlassen” eines Ortes, nicht “Befinden”). Da sich also der Pfeil zu jedem Moment offensichtlich in Ruhe befindet, kommt er überhaupt nicht vom Fleck.

Von Pfeilen befreit, und für die Belange der Quantenmechanik formuliert, lautet Zenos Paradox: jeglicher Versuch, die Dynamik eines Systems kontinuierlich zu beobachten, friert das System ein.

Dass die Quantenmechanik genau das liefert soll hier eingesehen werden. Dazu nehmen wir ein resonant getriebenes Zwei-Niveau System (Hamilton wie in Gl. (18)). Das System sei zu einem Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|g\rangle$. Zur Zeit t wird eine Zustandsmessung gemacht. Unter der Voraussetzung, dass im Zeitintervall $[0, t]$ keine Messung stattfand, ist dann die Besetzungsw'keit des Grundzustands, daran sei erinnert, gegeben $P_g(t) = \cos(\Omega_0 t)$ entsprechend die Besetzungw'keit des angeregten Zustandes $P_e = 1 - \cos(\Omega_0 t)$.

Was passiert eigentlich, wenn Zustandsmessungen zu Zeiten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$ mit $\Delta t = t/N$ vorgenommen werden? Bestätigen Sie, dass im Limes $N \to \infty$ (also “kontinuierlich nachgucken, in welchem Zustand sich das Atom befindet”) das Atom – trotz Antrieb! – im Grundzustand eingefroren ist.

Das “Quanten-Zeno” Paradox – angelsächsisch formuliert “A watched pot never boils” – ist kein Paradox, sondern Wirklichkeit! Dass Zwei-Niveau Systeme sehr wohl im angeregten Zustand sein können befindet sich aber nicht im Widerspruch zu dieser Wirklichkeit. Man muss sie halt nur “in Ruhe lassen” – sprich: eben nicht an ein “permanent-nachgucken-Instrument” koppeln …

Hinweis: Wenn Sie mit der Aufgabe fertig sind: nutzen Sie doch mal irgendeine Suchmaschine, Stichwort “Zeno Paradox”, oder gehen gleich auf Wikipedia. Besser noch: gehen Sie auf die Uni-Seite der Bibliothek, dort auf e-journals, natürlich Physik, klicken sich auf Physical Review A durch, und laden einfach herunter: “Quantum Zeno effect”, W. M. Itano et al., Phys. Rev A**41**, 2295 (1990). Da lernen Sie dann, wie man ein “permanten-nachgucken-Instrument” im Labor realisieren kann. Anschließend erfreuen Sie sich an einer Debatte über die Grundlagen der Quantenmechanik: “Comment on ‘Quantum Zeno effect’ ” von L. E. Ballentine, Phys. Rev. A**43**, 5165 (1991); “Reply to ‘Comment on Quantum Zeno effect’ ’ ” von W. M. Itano et al, Phys. rev. A**43**, 5168 (1991); “Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet” von V. Frerichs und A. Schenzle, Phys. Rev. A**44**, 1962 (1991).

▷ Aufgabe 8 (Länderfusion Berlin-Brandenburg) (2 Punkte)

In Berlin und in Potsdam hat man je ein Elektron in einer Falle eingesperrt und dort präpariert – in Potsdam im Zustand ϕ, in Berlin im Zustand χ. Die Potsdamer nennen ihr Elektron liebevoll "Fritzchen", die Berliner das ihrige zärtlich "Marlene". In der Länderfusionskommission wird der Zustand des Zwei-Elektronensystems gemäß

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \tag{20}$$

zu den Akten genommen, wobei der erste Faktor den Zustand von Fritzchen, der zweite Faktor den Zustand von Marlene beschreibt.

Da kommt ein naseweiser Professor, und behauptet das ganze wäre unzulässig – schließlich wären Elektronen grundsätzlich ununterscheidbare Fermionen. Der Zustand müsse also in Form

$$|\Psi\rangle \propto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle - |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle \tag{21}$$

notiert werden, und von "Fritzchen" und "Marlene" dürfe man gleich garnicht reden.

Angesichts Ihrer erstklassigen Ausbildung in Physik werden Sie nun zum Schiedsrichter berufen und sollen den Streit schlichten. Hat der Professor Recht oder kann man mit der Entscheidung der Länderfusionskommission leben?

▷ Aufgabe 9 (Gesellige Bosonen) (2 Punkte)

[Total Klausurrelevant ...]

Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, und so könnte man meinen, Bosonen seien ziemlich gewöhnliche Zeitgenossen. Das ist aber ein Irrtum: während sich Fermionen gegenseitig aus dem Weg gehen, sind Bosonen über die Maßen gesellige Wesen. Betrachten wir das einfache Beispiel zweier Bosonen, die zwei orthogonale Orbitale ϕ und χ besetzen können. Wären die beiden Teilchen unterscheidbar – man nennt sie dann *Boltzonen* –, so könnte das Zwei-Teilchensystem in einem der vier Zustande $\phi\phi$, $\phi\chi$, $\chi\phi$ oder $\chi\chi$ gefunen werden, in der Hälfte der Fälle also im gleichen Zustand.

Zeigen Sie, dass wenn es sich bei den beiden um Bosonen handelt, sie in 2/3 der Fälle im gleichen Zustand zu finden sind.

Bemerkung: Verglichen mit ihren klassischen Vettern, den *Boltzonen*, habe Bosonen also eine natürliche Tendenz zusammen zu klumpen, engl *bunching*. Diese Tendenz, die sich allerdings erst bei niedrigen Temperaturen bemerkbar macht, ist für viele interessante Effekte der Tieftemperaturphysik verantwortlich, angefangen bei der Bose-Einstein Kondensation bis hin zur Supraleitung. Wem der Gang in ein Tieftemperaturlabor zu anstrengend ist, kann wahlweise auch mal in der Photonik vorbeischauen. Auch die Photonen die beispielsweise von einem Laser erzeugt werden, haben die Tendenz zu Klumpen ...

▷ Aufgabe 10 (Bose-Einstein Kondensat) (4 Punkte)

Sperrt man N Teilchen mit ganzzahligem Spin (sog Bosonen) bei sehr tiefen Temperaturen (effektiv 0 Kelvin) in einer Falle ein, so bildet sich ein sog *Bose-Einstein Kondensat* – ein kollektiver Quantenzustand, der sich in sehr guter Näherung mit einer Ein-Teilchen Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ beschreiben lässt. In der Quantenstatistik lässt sich begründen, dass der effektive Ein-Teilchen Hamiltonoperator in der Ortsdarstellung die folgende Gestalt hat:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{trap}}(\vec{x}) + \frac{g}{2}\varrho(\vec{x})\,, \tag{22}$$

wobei $\varrho(\vec{x}) \equiv |\psi(\vec{x})|^2$ die *Teilchendichte*, und g eine effektive Zwei-Teilchen Wechselwirkungskonstante.

Betrachten Sie nun eine harmonische Falle $V_{\text{trap}}(\vec{x}) = \frac{m\Omega^2}{2}\vec{x}^2$. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie des Systems mit Hilfe des Ritz'schen Variationsverfahrens. Verwenden Sie dazu einen Gauss'schen Ansatz $\psi(\vec{x}) = \mathcal{N}e^{-\vec{x}^2/(4\sigma^2)}$, wobei σ Variationsparameter und $\mathcal{N}$ über die Normierungsbedingung $\int d^3x|\psi(\vec{x})|^2 = N$ festgelegt ist.

▷ Aufgabe 11 (Wohnst-Du-noch) (2 Punkte)

[KLaussurrelevant ...]

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.

▷ Aufgabe 12 (Witch-path detection) (π Punkte)

[Do (a)–(e), then jump to the conclusions; if a you are familiar with the the mumbo-jumbo of information theory, you may also want to touch (f) and (g)].

We consider a Young double slit experiment for spin-$\frac{1}{2}$ particle. We assume some magnetic field behind one of the slits – the slit on the right side, say. As we shall see the magnetic field – although it has no impact on the motional state of the atoms – may have a severe impact on the interference pattern of the double slit.

The particles impinge in some definite spin state $|\uparrow_z\rangle$. Behind the double slit the state vector reads

$$|\Psi\rangle = \frac{|l\rangle \otimes |\uparrow_z\rangle + |r\rangle \otimes |\uparrow_a\rangle}{\sqrt{2}}\,, \tag{23}$$

where $|l\rangle$ ($|r\rangle$) is the translational state of particles which passed through the left (right) slit (with the other slit closed), and $\uparrow_a$ is the rotated spin state of particles which passed through the right slit. In the position representation the translational states are $l(x) := \langle x|l\rangle \propto e^{ikx}$, $r(x) := \langle x|r\rangle \propto e^{-ikx}$, where x is the lateral coordinate (the longitudinal coordinate of the primary direction of motion is treated classically).

The state vector (23) is that of an entangled state. Note that in contrast to the motional state "passage though the left slit" $|l\rangle$ and "passage through the right slit" $|r\rangle$, which are true alternatives, $\langle l|r\rangle = 0$, the spin state are not necessarily orthogonal.

(a) Confirm the so-called Schmidt decomposition of Eq. (23).

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p}|\phi_+\rangle \otimes |\uparrow_c\rangle + \sqrt{1-p}|\phi_-\rangle \otimes |\downarrow_c\rangle \tag{24}$$

where $\vec{c} = (\vec{e}_z + \vec{a})/\|\vec{e}_z + \vec{a}\|$ is a spatial unit vector, $|\phi_\pm\rangle = (|r\rangle \pm |l\rangle)/\sqrt{2}$. What is p expressed in terms of $\vec{a}, \vec{z}$?

(b) The particles impinge on a detection screen (a CCD camera, say) which is not sensitive to the spin state. Compute the probability density I at point x on the detection screen. Confirm

$$I(x) \propto |l(x)|^2 + |r(x)|^2 + \beta l(x)^* r(x) + \beta^* r(x)^* l(x) \,. \tag{25}$$

where

$$\beta = \langle \uparrow_z \mid \uparrow_a \rangle \,. \tag{26}$$

(c) The density I diplays an interference pattern, the modulation depth of which, called *fringe contrast*, depends sensitively on the spin-state overlap β. Using the definition of the fringe contrast

$$\gamma := \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{27}$$

please confirm

$$\gamma = |\beta| \,. \tag{28}$$

For maximally distinguishable spin states $\beta = 0$, the contrast is zero and the interference pattern turns into the distribution of classical point particles. For indistinguishable spin states, $\beta = 1$, contrast is maximal, i.e. the density distribution is “maximally quantum”. Note that the reduction in contrast takes place even though, in our model, the particle’s motion is not influenced by the magnetic field.

Yet spin measurement may reveal information about the slit each invidual particle took before reaching the screen, called *which-path-information*. The more which-path information we can extract, the lower the fringe contrast, and concomitantly, the more “classical” the density distribution.

(d) Use the rules of elementary quantum mechanics to confirm

$$\mathrm{Prob}(l, \uparrow_z) = \tfrac{1}{2} \,, \qquad \mathrm{Prob}(r, \uparrow_z) = \tfrac{1}{2} q \,, \tag{29}$$

$$\mathrm{Prob}(l, \downarrow_z) = 0 \,, \qquad \mathrm{Prob}(r, \downarrow_z) = \tfrac{1}{2}\left(1 - q\right) \,. \tag{30}$$

where $q = |\beta|^2$, and $\mathrm{Prob}(a, b)$ is short for the joint probability to find the particle in motional state a AND in spin state b.

(e) Infer $\mathrm{Prob}(\uparrow_z) = \frac{1}{2}(1 + q)$, $\mathrm{Prob}(\downarrow_z) = \frac{1}{2}(1 - q)$, and the conditional probabilities

$$\mathrm{Prob}(l| \uparrow_z) = \frac{1}{1+q} \,, \qquad \mathrm{Prob}(r| \uparrow_z) = \frac{q}{1+q} \,, \tag{31}$$

$$\mathrm{Prop}(l| \downarrow_z) = 0 \,, \qquad \mathrm{Prob}(r| \downarrow_z) = 1 \,. \tag{32}$$

where $\mathrm{Prob}(a|b)$ is the conditiona probability to find the particle in motional state a, given it is for usure in the spin state b, and $\mathrm{Prob}(b)$ is the probability to find the particle in spin-state b irrespective of its motional state.

(f) The conditional probabilities, in turn, can be quantified in terms of conditional entropies. [3] Cofirm that the residual uncertainty, which remains about the path given the

[3]Unfortunately, in information theory the letter H refers to the various types of Entropies, and not the Hamiltonian.

particle is detected with spin up, is given by

$$H(\text{path}|\uparrow_z) = \frac{1}{1+q}\log_2(1+q) + \frac{q}{1+q}\log_2\left(\frac{1+q}{q}\right), \tag{33}$$

while $H(\text{path}|\downarrow_z) = 0$, because $\downarrow_z$ can only be found for particles which took the right slit.

(g) The initial level of ignorance about the path is $H_{\text{initial}} = 1bit$. The average level of ignorance which remains after a spin measurement is $H_{\text{final}} = \text{Prob}(\uparrow_z)H_\uparrow + \text{Prob}(\downarrow_z)H_\downarrow$. The average information gain $I_{\text{av}} = H_{\text{initial}} - H_{\text{final}}$. Compute I_{av} and summarize: Information gain is maximal if the spin states $\uparrow_z$, $\uparrow_a$ are orthogonal, $q = 0$. If the spin states are parallel, $q = 0$, information gain is zero – in this case spin measurement does not reveal any which-path-information.

Evidently, it is the mere presence of which-path information, and not the uncontrolled scattering of a photon, say, which affects the spatial density distribution. The more we can learn about the path, the more classical appears the distribution. The less we can learn about the path, the more quantum appears the distribution.

In our model, the which-path information and fringe contrast is intimately linked to the entanglement between the motional and spin degrees of freedom. The more entanglement, the better the which-path measurement. The better the which-path measuremnt, the less quantum the pattern. The less quantum the pattern, the more classical the distribution. Entanglement may well destroy that what is most important – the coherence. In the present case it destroys the coherence between the wave functions $l(x)$ and $r(x)$.

▷ **Aufgabe 13 (Prisoners' Dilemma)** (0 Punkte)

[Für Ihre Sozialkompetenz . . .]

Take a friend, go to the bar, but don't order drinks immediately. Instead you agree on the following. Whoever orders a drink, must pay for the drink, but the other will enjoy the drink. Enjoying a drink, while the other has nothing gives maximal satisfaction 5 points (yes – it is a nasty game). Suffering without a drink while the other is enjoying his drink gives minimal satisfaction 0 points. Enjoying a drink in company gives 3 points, while joint suffering of both without drink gives 1 point ("at least I am not alone").

Evidently, this is a two-player binary choice game (for each round the choice is "I order a drink" vs "I do not order a drink"), yet in contrast to ordinary board games (or the like), it is "non-zero sum" (contemplate on the outcome "nobody ever orders any drink" vs " both order a drink"). Surprisingly, this game has a solution which is easily found by rational reasoning (assuming that both you and your frind strive for maximal satisfaction). Unfortunately, however, this solution is rather frustrating which is why the game poses a dilemma . . .

Background: The game runs under the title "Prisoners Dilemma" because, when it was invented in the 1950's, the story which comes with the game plays in the American System of Justice where deals between the various parties (prisoner, lawyer, attorney, judge) are quite common. The PD made some headlines in the eighties when Sociology tried to understand, how in a society of egoist, mutual cooperation (where, in the end, both enjoy their drink) can emerge. It was discovered, that the PD is the paradigm for the interaction between individuals, and the big question was, how the player could escape the Dilemma. In a computer tournament, led by Robert Axelrodt, it turned out that in an iterated PD (where the players play PD several times without knowing in advance, however, how often they will play), so called "Tit-for-Tat" is the most promising strategy: order the drink in the first move, and from then on do whatever your friend did in the previous move. Meanwhile, the games was quantized, see Quantum Games and Quantum Strategies by J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).