Eikonal
Mathematische Bissen zu Kursvorlesung Theoretische Physik

---

1 Intro

Die stationäre Schrödingergleichung, von Erwin Schrödinger zum Jahreswechsel 1925/26 auf den Skipisten von Arosa in den Schnee geschwungen,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)\,. \tag{1}$$

ist nicht Resultat einer himmlischen Offenbarung, sondern Ergebnis der sorgfältigen Formulierung und Analsyse einer Proportion:[1] *Die (noch unbekannte) Wellenmechanik "WM" verhält sich zur klassischen Mechanik "KM" wie die Wellenoptik "WO" zur geometrischen Optik "GO"* , kurz

$$\frac{\mathrm{WM}}{\mathrm{KM}} = \frac{\mathrm{WO}}{\mathrm{GO}}\,. \tag{2}$$

Nun gehören weder die geometrische Optik – incl. Schlüsselkonzept *Eikonal* – noch ihr mechanisches Gegenstück – die *verkürzte Wirkung* der Hamilton-Jacobi Theorie – heutzutage zum Standardrepertoire der Physikausbildung. Um trotzdem den Schrödingerschen Geniestreich angemessen würdigen zu können, und dabei vielleicht etwas fürs Leben zu lernen, hier also ein kurzer Abriss der geometrischen Optik und der Hamilton-Jabobi Formulierung der klassischen Mechanik. Ziel des Ganzen ist es, dass Sie die Arbeiten von Schrödinger im Original lesen ... und genießen![2]

2 Geometrische Optik

Geometrische Optik ist Wellenopitk im Grenzfall verschwindender Wellenlänge, wenn also die Eigenschaften des Mediums in dem sich das Licht ausbreitet auf der Skala einer typischen Wellenlänge nur wenig variieren und Beugung bzw Interferenz nicht in Erscheinung treten. Die zentralen Begriffe der geometrischen Optik sind der Lichtstrahl und das Eikonal. Der geometrische Lichtstrahl ist eine Gerade, in inhomogenen Medien eine Kurve – in

---

[1] Wenn man einer Anekdote Glaube schenken darf – und manche Anekdoten sind einfach zu schön um nicht geglaubt zu werden – sah Schrödinger sich von einer Frage von Paul Debye herausgefordert, die ihm anlässlich eines Kolloquiums zur De Broglie Hypothese vorgelegt wurde: "Na – wenn Teilchen Wellen sind – was ist denn die Wellengleichung?".

[2] Die fraglichn Arbeiten wären: *Quantisierung als Eigenwertproblem* Annalen der Physik, Vierte Folge, Band 79 (1926), S.361–376 (erste Mitteilung); S.489–527 (zweite Mitteilung); Band 80, S.437–490 (dritte Mitteilung). Während die Schrödingergleichung für das Wasserstoffproblem bereits in der ersten MItteilung aufgestellt und gelöst wird, erfolgt ihre eingehende Begründung in Form der Proportion (2) erst in der zweiten Mitteilung. Die drtitte Mitteilung ist der Störungstheorie gewidmet, die insbesondere auf den Starkeffekt angewendet wird (Aufspaltung der Spektrallinien im elektrischen Feld).

jedem Fall ein räumliches Gebilde ohne laterale Ausdehnung.[3] Das Eikonal ist ein skalares Feld dessen lokale Gradientient mit den Richtungen von Lichtstrahlen zusammenfallen.

2.1 Eikonalgleichung

Wir betrachten Lichtausbreitung in linearen und verlustfreien aber möglicherweise inhomogenen Medien. Wir nehmen dabei an, dass sich die Materialeigenschaften, das sind die relative Permittivität $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon/\varepsilon_0$ und die relative Permeabilität $\mu_{\mathrm{r}} = \mu/\mu_0$ auf der Skala der Wellenlänge nur langsam ändern,

$$|\nabla\varepsilon_{\mathrm{r}}|, |\nabla\mu_{\mathrm{r}}| \ll \lambdabar_0^{-1} \tag{3}$$

wo $\lambdabar_0 = \lambda_0/(2\pi)$ eine typische (reduzierte) Wellenlänge des Lichtfeldes, und ∇ der Gradient, in kartesischen Koordinaten $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Unter der Bedingung (3) reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen der Wellenoptik in führender Ordnung einer Entwicklung in $\lambdabar_0\nabla$ auf einfache Wellengleichungen der Form

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0\,. \tag{4}$$

worin $n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}$ der Brechungsindex, in inhomogenen Medien ortsabhängig, $n = n(x, y, z)$, und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace Differentialoperator.

Es ist nicht unüblich, Gl. (4) als Ausgangspunkt der sog *skalaren Wellenoptik* zu nehmen – auch wenn damit nicht alle Aspekte der physikalische Wellenoptik (d.h. die Maxwell'sche Theorie) erfasst werden. Unter den Tisch fallen beispielsweise Fragen der Polaristation oder des Zusammenhangs von elektrischer und magnetischer Erregung. Das soll hier aber nicht interessieren, und wir bleiben bei der skalaren Wellenoptik.

Von besonderem Interesse sind monochromatische Felder,

$$E(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z)e^{-i\omega_0 t} + c.c \tag{5}$$

worin $\omega_0 = c/\lambdabar_0$ die (Winkel-)Frequenz, und $\mathcal{E}$ eine komplexes Feld, das die Ortsabhängigkeit von E charakterisiert.

Die Funktion $\mathcal{E}$ genügt einer skalaren Helmholtzgleichung

$$-\lambdabar_0^2\Delta\mathcal{E}(x, y, z) = n^2(x, y, z)\mathcal{E}(x, y, z)\,. \tag{6}$$

Wählt man hier eine Darstellung,

$$\mathcal{E}(x, y, z) = A(x, y, z)e^{\frac{i}{\lambdabar_0}\chi(x,y,z)} \tag{7}$$

mit reellwertigen A und χ, die die Amplitude und Phase von $\mathcal{E}$ bestimmen, übersetzt sich Gl.(6) in

$$\lambdabar_0^2 n^2\frac{\Delta A}{A} - \left[(\nabla\chi)^2 - n^2\right] = 0 \tag{8}$$

[3] Das unterscheidet die geometrische Optik von der sog *Gauss'schen Optik*, wo auch die beugungsbedingte laterale Aufweitung eines Lichtstrahls berücksichtigt wird.

$$2\frac{\nabla A \cdot \nabla \chi}{A} + \Delta \chi = 0\,. \tag{9}$$

Im Grenzfall $\lambda\!\!\!^{-}_0 \to 0$ kann das erste Glied in (8) vernachlässigt werden, und man erhält

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x,y,z)\,. \tag{10}$$

kurz $(\nabla\chi)^2 = n^2$.

Die Funktion χ fungiert in der Physik unter dem Begriff *Eikonal* (Altgrichisch $\varepsilon\kappa o\nu$ = Bild, Abbild), und Gl. (10) heißt die sog *Eikonalgleichung*. Die Eikonalgleichung ist für die geometrische Optik von ähnlicher Bedeutung wie die Newtonsche Bewegungsgleichung für die klassische Mechanik.

Die Eikonalgleichung (10) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in drei unabhängigen Variablen x, y, z.[4] Sie hat, wie alle Differentialgleichungen, viele Lösungen. Betrachten wir der Einfachheit halber ein homogenes Medium $n = const.$. Eine Lösung, entsprechend dem Eikonal der ebenen Welle, hat die Form $\chi = n\mathbf{e}\cdot\mathbf{x} + a$ worin $\mathbf{e}$ räumlicher Einheitsvektor der die Ausbreitungsrichtung der Welle charakterisiert, und a eine Konstante, der den Eikonalwert im Punkt $\mathbf{x} = 0$ spezifiziert. Eine andere Lösung wäre $\chi = n|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ entsprechend dem Eikonal einer Kugelwelle mit Zentrum bei $\mathbf{x}_0$. [5]

Die physikalische Bedeutung eines Eikonals erschließt sich aus Phase des Lichtfeldes,

$$\phi(x,y,z,t) = k_0\left[\chi(x,y,z) - ct\right]\,. \tag{11}$$

Die Bindungsgleichung $\chi(x,y,z) = const.$ definiert für gegebenes t eine Fläche konstanter Phase – eine geometrische Wellenfront. Im Lauf der Zeit verschiebt bzw deformiert sich die Wellenfront. Allerdings lässt sich ihr zeitliches Schicksal vollständig aus dem Eikonal $\chi(x,y,z)$ ablesen. Die Wellenfront $\phi = 0$, beispielsweise, ist zur Zeit $t = t_1$ durch die Äquieikonalfläche $\chi = ct_1$ bestimmt, zur Zeit $t = t_2$ durch die Äquieikonalfläche $\chi = ct_2$.

Mit der zeitlichen Verschiebung von Wellenfronten ist Transport von Energie verbunden. Aus der Wellengleichung folgt zunächst das Poyntingsche Theorem,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0\,, \tag{12}$$

worin

$$u = i\frac{n^2}{c^2}\left(E^*\dot{E} - E\dot{E}^*\right) \tag{13}$$

[4]Eine Lösung dieser PDGL, eingesetzt in (9), bestimmt dann auch die Amplitude die uns aber hier nicht weiter interessiert.

[5]Die allgemeine Lösung – genannt das *allgemeine Integral* – hängt von einer beliebigen Funktion in zwei Variablen ab. Durch Vorgabe geeigneter Bedingungen wird diese Funktion bestimmt und man erhält eine eindeutige Lösung. Beispielsweise kann eine bestimmte räumliche Fläche als Äquieikonalfläche ausgezeichnet werden. Damit ist dann auch die Richtung von $\nabla\chi$ auf dieser Fläche bestimmt (nämlich genau orthogonal zu dieser Fläche), während der Betrag durch die Eikonalgleichung (10) festgelegt ist. Für physikalische Anwendungen interessiert allerdings weniger das allgemeine Integral, sondern vielmehr eine sog *vollständiges* Integral. Eine vollständiges Integral ist dadurch ausgezeichnet, dass es von mindestens genaus so vielen unabhängigen Parametern abhängt wie es unabhängige Variable gibt. Das Eikonal der ebenen Welle, beispielsweise, ist genau von diesem Typ. Freie Parameter sind hier der Azimuth- und Polarwinkel des Richtungsvektors de nebst der Konstanten a.

die Energiedichte, und

$$\mathbf{S} = \frac{1}{i}\left(E^*\nabla E - E\nabla E^*\right) \tag{14}$$

die Energiestromdichte. In Eikonalnäherung

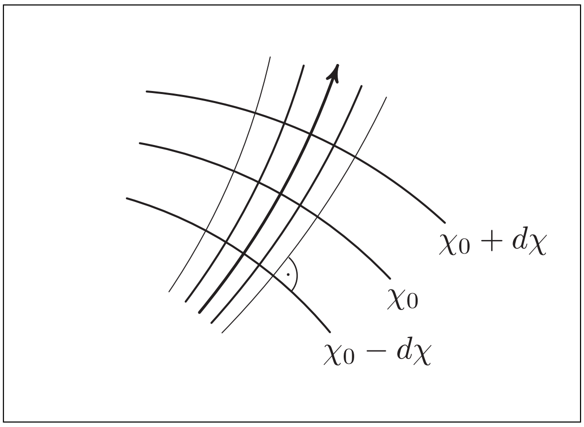
$$\mathbf{S} = vu\frac{\nabla\chi}{|\nabla\chi|} \tag{15}$$

worin $v = v(x, y, z)$,

$$v(x,y,z) = \frac{c}{n(x,y,z)} \tag{16}$$

in Verallgemeinerung der bekannten Beziehung $v = c/n$ für die *Phasengeschwindigkeit* in homogenen Medien mit Brechungsindex n.

Gemäß Gl. (15) propagiert die Energie eines monochromatischen Wellenfeldes mit Phasengeschwindigkeit in Richtung des Eikonalgradienten. Als Lichtrahlen der geom Optik sind nun genau diejenigen Raumkurven bestimmt längs derer der Energietransport stattfindet, die also in Richtung des Eikonalgradienten senkrecht zu den Aquieikonalflachen verlaufen.



Jedes Eikonal – jede Lösung der Eikonalgleichung – bestimmt ein ganzes Bündel von Lichtstrahlen.

Die Lichtstrahlen der geometrischen Optik können in einem einfachen Teilchenbild mechanisch gedeutet werden. Demnach wird ein Lichtstrahl mit der Spur der Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ eines fiktiven Teilchens – hier getauft *Phason*[6] – identifiziert, das von einer Wellenfront längs des fraglichen Lichtstrahls mitgeführt wird, $\phi(\mathbf{r}(t), t) = const.$. Die Richtung der Geschwindigkeit der Phasonen fällt definitionsgemäß mit dem Eikonalgradienten zusammen, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \sim \nabla\chi$. Ihr Betrag ist durch die Gl. (16) bestimmt, und also ist die Geschwindigkeit der Phasonen gegeben

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c}{n^2(\mathbf{r}(t))}\nabla\chi(\mathbf{r}(t))\,. \tag{17}$$

Gleichung (17) ist eine gekoppeltes System dreier nichtlinearer gewöhnlicher DGL erster Ordnung zur Bestimmung der Trajektorie eines Phasons bei gegebenem Eikonal. Eine eindeutige Lösung erhält man durch Vorgabe eines Anfangsortes. Die Anfangsrichtung ist durch Wahl des Eikonals bereits vorgegeben und kann nicht frei gewählt werden.

Multiplikation von (17) mit n^2 und anschließende Differentiation nach der Zeit liefert ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Bestimmung einer Phasonentrajektorie ausschließlich unter Verwendung des Brechungsindex gestattet:

$$\frac{d}{dt}\left(n^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = c\frac{d}{dt}\nabla\chi = c\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla(\nabla\chi) = \frac{c^2}{n^2}\nabla\chi\cdot\nabla(\nabla\chi) = \frac{c^2}{2n^2}\nabla[(\nabla\chi)^2] = \frac{c^2}{2n^2}\nabla n^2 \tag{18}$$

[6] Meine Bezeichnung. Achtung: ein Phason ist kein lokalisierter Lichtpuls. Phasonen reisen mit Phasengeschwindigkeit, Lichtpulse mit Gruppengeschwindigkeit. Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit sind in dispersiven Medien durchaus verschieden.

und also

$$\frac{d}{dt}\left(n^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = c^2\nabla\log n\,. \tag{19}$$

Ergänzt um die Nebenbedingung $|d\mathbf{r}/dt| = c/n$ und Anfangsbedingungen den Ausgangsort und anfängliche Richtung des Lichtstrahls betreffend, lässt sich mit Hilfe von (19) die Trajektorie eines Phasons (entsprechend Raumkurve eines Lichtstrahls) einfach bestimmen. HIngewieen sei hier auf die augenfällige Ähnlichkeit mit den Newtonschen Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}m\frac{d}{dt}\mathbf{r} = -\nabla V$.

2.2 Fermat'sches Prinzip

Bei der Reise eines Phasons längs eines Lichtstrahls sind Weg- und Zeitinkremente verknüpft $nds = cdt$. Für zwei Punkte P_1 und P_2 auf einem Lichtstrahl ist die mit c multiplizierte Flugzeit des Phasons gegeben

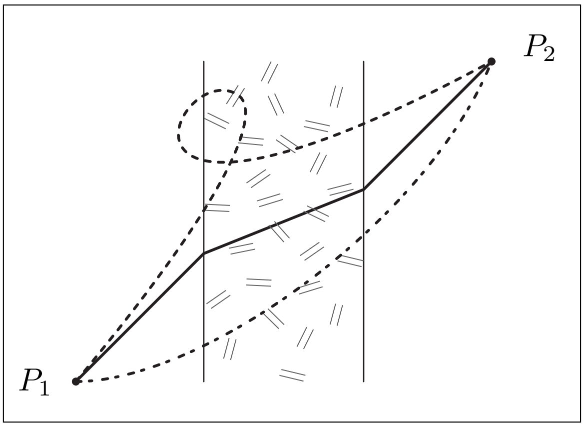
$$c\int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{r}(s))ds = \chi(\mathbf{r}_2) - \chi(\mathbf{r}_1)\,. \tag{20}$$

also genau die Eikonaldifferenz.

Das Integral $\int nds$ fungiert in der Optik unter dem Begriff *optische Weglänge*. Betrachtet man die optische Weglänge nicht nur für Lichtstrahlen, sondern lässt allgemeine Kurven zu, wird die optische Weglänge zum Funktional

$$\ell[C] = \int_C nds \tag{21}$$

worin C irgendeine Kurve, die den Anfangspunkt P_1 mit dem Endpunkt P_2 verbindet .



Das Fermat'sche Prinzip besagt nun, dass der Lichtstrahl von P_1 nach P_2 genau diejenige Kurve beschreibt für die ℓ extremal, $\delta\ell = 0$. Alternativ: für die die Reisezeit ℓ/c extremal.

Seien die Kurven C parametrisiert $\tau \mapsto \mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, wobei für alle Kurven $\mathbf{r}(\tau_1) = P_1$, $\mathbf{r}(\tau_2) = P_2$, liest sich die Variationsaufgabe

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x, y, z, x', y', z')d\tau = 0 \tag{22}$$

mit einer Lagrange-Funktion

$$L = n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{23}$$

wo $x' = \frac{dx}{d\tau}$ etc.

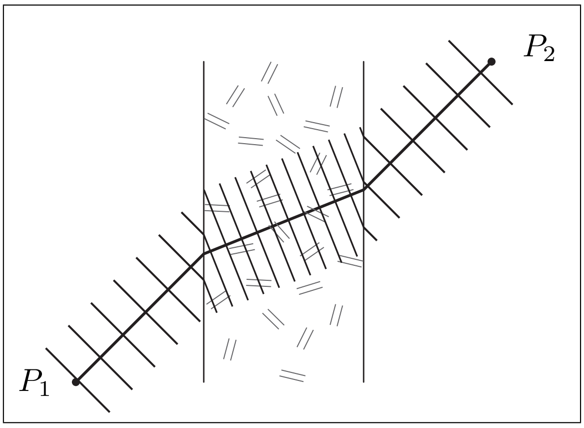
Die Euler-Lagrange Gleichungen zum Variationsproblem (22) lauten

$$\frac{d}{d\tau}n\frac{1}{u}\frac{d\vec{r}}{d\tau} - u\nabla n = 0\,, \tag{24}$$

worin abkürzend $u = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Wegen $ud\tau = ds$, ergo $\frac{1}{u}\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{ds}$, erweisen sich Gl. (24) identisch mit Gl. (19): Das Fermat'sche Prinzip (22) und die Eikonalgleichung (10) sind also vollständig äquivalent!

3 Hamilton-Jacobi Mechanik des Massepunktes

Die Euler-Lagrangegleichungen des Fermatschen Prinzips erinnern an die Newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. In der Tat lassen sich die Lichstrahlen der geometrischen Optik – ganz im Sinne Newtons – mechanisch als Trajektorien fiktiver Teilchen deuten. Das Eikonal erweist sich dabei als eine Funktion die in der Mechanik nach Hamilton-Jacobi unter dem Begriff der (verkürzten) Wirkung bekannt ist. Die Wellenoptik reduziert sich im Kurzwellenlimes auf die Mechanik, die Wellengleichung korrespondiert in diesem Limes einer Hamilton-Jacobi Gleichung.



3.1 Prinzip der kleinsten Wirkung

Dem Massepunkt der sich unter dem Einfluss einer konservativen Kraft bewegt, daran sei erinnert, ist in der Mechanik eine Lagrangefunktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - V$ zugeordnet, worin $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2$ die kinetische Energie des Massepunktes, und $V = V(\mathbf{q})$ das Potential der Kraft. Die Bewegungsgleichung des Massepunktes ergibt sich aus dem Hamiltonschen Prinzip, wonach das Wirkungsfunktional

$$S[\mathbf{q}] := \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t'))dt' \tag{25}$$

für eine wahre Bahn $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ extremal, $\delta S|_{\mathbf{q}=\mathbf{r}} = 0$. Auswertung dieses Variationsproblems führt auf die Euler-Lagrange Gleichungen,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right]_{\mathbf{q}=\mathbf{r}} = 0\,. \tag{26}$$

die sich für einen Massepunkt auf die Newtonsche Bewegungsgleichung reduzieren, $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V$.

3.2 Hamilton-Jacobi Gleichung

Betrachtet man all diejenigen wahre Bahnen, die zu einem festen Zeitpunkt t_1 durch eine vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}_1$ führen, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{x}_1$, ist die Wirkung nicht länger Funktional, sondern eine einfache Funktion der oberen Integrationsgrenze t_2 und Koordinate $\mathbf{x} := \mathbf{r}(t_2)$, die zur Zeit $t = t_2$ vom System angenommen wird, kurz $S = S(\mathbf{x}, t)$. Die Hamilton-Jacobi

Formulierung der Mechanik basiert auf einer partiellen Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion $S(\mathbf{x}, t)$ die es nun zu bestimmen gilt.

Für eine wahre Bahn $\mathbf{r}(t')$, $t_1 \leq t' \leq t_2$, ändert sich mit $t = t_2$ auch die Koordinate $\mathbf{x}$, und die totale zeitliche Ableitung der Wirkungsfunktion $S(\mathbf{x}, t)$ liest sich

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_t \dot{\mathbf{r}} \tag{27}$$

wobei wie üblich $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Andererseits, mit Blick auf die Definition (25),

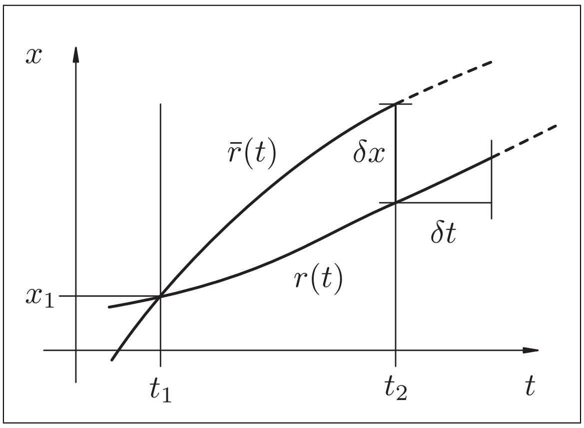
$$\frac{dS}{dt} = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{r}})\,, \tag{28}$$

daher

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{r}} - L = 0\,. \tag{29}$$

Das sieht vielversprechend aus, ist aber noch keine akzeptable Gleichung für $S(\mathbf{x}, t)$ da hier die Geschwindikeit $\dot{\mathbf{r}}$ noch eingeht.

Betrachtet man nun zwei benachbarte wahre Bahnen, $\mathbf{r}$ und $\bar{\mathbf{r}}$, deren Koordinaten $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ und $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}}(t)$ sich zur Zeit $t = t_2$ nur wenig unterscheiden, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}$. In diesem Falle wird auch die Differenz der Wirkungen $\delta S := S(\bar{\mathbf{x}}, t) - S(\mathbf{x}, t)$ klein sein, in führender Ordnung



$$\begin{aligned}\delta S &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{r}} \delta\mathbf{r}\Bigg|_{t_1}^{t=t_2} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt'}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{r}} \delta\mathbf{r}(t')dt'\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Da nach Voraussetzung $\mathbf{r}(t')$ eine wahre Bahn – also den Euler-Lagrange Gleichungen genügt – verschwindet das Integral auf der rechten Seite.

Im ersten Term auf der rechten Seite ist $\delta\mathbf{r}(t_1) = 0$ und $\delta\mathbf{r}(t) = \delta\mathbf{x}$ zu setzen. Entsprechend variiert die Wirkung bei festem t aber variierender Endlage $\delta S|_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q} = \mathbf{r})\delta\mathbf{x}$, bzw $\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q} = \mathbf{r})$. Erinnert man sich hier an die Definition des kanonischen Impulses, $\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$, schaut man auf

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{p}\,. \tag{31}$$

Ruft man sich auch die Definition der Hamiltonfunktion in Erinnerung, $H := \dot{\mathbf{r}}\mathbf{p} - L$, liest man aus () die Hamilton-Jacobi Gleichung der klassichen Mechanik ab,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, t) = 0\,. \tag{32}$$

Ist die Hamiltonfunktion nicht explizit zeitabhängig, ist also die Energie eine Erhaltungsgröße, $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = E = const.$, lässt sich die Wirkung schreiben

$$S(t, \mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - E(t - t_i) \tag{33}$$

mit einer zeitunabhängigen Funktion $W(\mathbf{x})$, sog *verkürzte Wirkung*. Die Differentialgleichng für die verkürzte Wirkung lässt sich aus () ablesen,

$$H(\mathbf{x}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}) = E\,. \tag{34}$$

Für das Punktteilchen im konservativen Kraftfeld,

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \tag{35}$$

lautet die Hamilton-Jacobi Gleichung ()

$$(\nabla W)^2 = 2m[E - V(x, y, z)]\,. \tag{36}$$

Assoziiert man hier $n(x, y, z) = \sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}$, erscheint die Hamilton-Jacobi Gleichung formgleich mit der Eikonalgelichung ().

4 Schrödingers Gleichung

Die stationäre Wellengleichung $-k_0^{-2}\Delta E = n^2 E$ entspricht der Eikonalgleichung $(\vec{\nabla}\chi)^2 = n^2$.

Die Hamilton-Jacobi Gleichung $(\vec{\nabla}W)^2 = 2m(E - V)$, so Schrödingers Argument, wäre im Kontext einer Wellenmechanik als Eikonalgleichung aufzufassen. Ihr entspräche dann eine stationäre Wellengleichung $-\alpha^2\Delta\varphi = 2m(E - V)\varphi$ mit einer zunächst unbestimmten Konstanten α der physikalischen Dimension “Wirkung”, die die Rolle von k_0^{-1} übernähme. Um die Konstante α zu bestimmen, betrachte man beispielsweise freie Teilchen, also $V = 0$. Lösungen von $-\alpha^2\Delta\varphi = E\varphi$ sind ebene Wellen $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, wobei $\alpha^2\vec{k}^2 = 2mE = \vec{p}^2$. Nimmt man jetzt die Die DeBroglie Beziehung $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ zu Hilfe, worin $\vec{k}$ Wellenvektor der DeBroglie'schen Materiewelle, und $\hbar$ das (reduzierte) Planck'sche Wirkungsquantum, liegt α fest, $\alpha = \hbar$.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, y, z)\right]\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z)\,. \tag{37}$$

bekannt als die *sationäre Schrödingergleichung*.