Theoretische Physik II - Elektrodynamik WS 05/06

(PD Dr. Achim Feldmeier) [1]

Übungsblatt 1 (32 Punkte) – Ausgabe: 17.10.2005, Abgabe: 24.10.2005

▷ **Aufgabe 1 (Gradient)** (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie für Skalarfelder $\Phi(\vec{r}), \Psi(\vec{r})$, daß

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi.$$

(1 Punkt)

(b) Zeigen Sie durch Rechnung in kartesischen *und* sphärischen Koordinaten, daß

$$\begin{aligned} \nabla r &= \hat{r} \\ \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\hat{r}}{r^2}. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \\ \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &= \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \end{aligned}$$

Dabei ist ∇' der Gradient bezüglich der Variable $\vec{r}\,'$ statt $\vec{r}$. (1 Punkt)

(d) Zeigen Sie für $\Phi = \Phi(r)$ mit $r = |\vec{r}|$, daß

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r}$$

und

$$\Delta\Phi = \Phi'' + \frac{2\Phi'}{r}.$$

Sie dürfen Formeln für ∇ und Δ in krummlinigen Koordinaten aus einer Formelsammlung ihrer Wahl benutzen. (2 Punkte)

(e) Zeigen Sie, daß

$$\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -(\vec{k}\cdot\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

(1 Punkt)

[1] `http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2005/ed05/`

▷ **Aufgabe 2 (Relationen mit ∇)** (7 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Relationen gelten

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\Phi \vec{E}) &= \nabla\Phi \cdot \vec{E} + \Phi \nabla \cdot \vec{E}, \\
\nabla \times (\Phi \vec{E}) &= \nabla\Phi \times \vec{E} + \Phi \nabla \times \vec{E}, \\
\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{F}) &= \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{F}, \\
\nabla \times (\vec{E} \times \vec{F}) &= (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{E}\nabla \cdot \vec{F} - \vec{F}\nabla \cdot \vec{E}, \\
\nabla(\vec{E} \cdot \vec{F}) &= (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{F} \times \nabla \times \vec{E} + \vec{E} \times \nabla \times \vec{F}.
\end{aligned}
$$

▷ **Aufgabe 3 (Divergenz, Rotation in krummlinigen Koordinaten)** (10 Punkte)

Berechnen Sie mittels deren Integraldefinitionen div und rot in krummlinigen Orthogonalkoordinaten (metrische Faktoren h_1, h_2, h_3).

Tipp: Wählen Sie geeignete infinitesimale Integrationswege entlang der Koordinatenlinien. Nur die 1. Ordnung in einer Taylorreihenentwicklung ist zu berücksichtigen. Vgl. Mechanikvorlesung.

▷ **Aufgabe 4 (Magnetfeldlinien geschlossen)** (8 Punkte)

Sei $\vec{B}$ ein Vektorfeld. *Feldlinien* definiert man als (bevorzugt stetig-differenzierbare) Kurven, die an jedem Punkt tangent zu den Vektoren des Feldes sind. Zeigen Sie:

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \leftrightarrow$ Die Feldlinien sind geschlossen.

Scheinkriterien

i. Mindestens 50% der Punkte in den Übungsaufgaben, pro Person oder – stabiler! – Zweiergruppe.

ii. Mindestens 50% der Punkte (pro Person) in der Klausur (am Semesterende) oder Nachklausur (am Ferienende).

iii. Pro Person, zweimaliges Vorrechnen an der Tafel in den Übungsgruppen.

iv. In allen Aufgaben bitte einen nachvollziehbaren, logisch stringenten Lösungsweg ("Lehrbuchstil"). Ggf. Skizzen.