Theoretische Physik II - Elektrodynamik WS 05/06

(PD Dr. Achim Feldmeier) [1]

Übungsblatt 10 (35 Punkte) – Ausgabe: 19.12.2005, Abgabe: 09.01.2006 [2]

▷ Aufgabe 1 (Hertzscher Vektor) (4 Punkte)

(a) Unter welcher Bedingung ist (Punkt: Zeitableitung)

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \mathrm{rot}\, \dot{\vec{R}}, \qquad \vec{E} = \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \vec{R}.$$

eine Lösung der Maxwellgleichungen im Vakuum (keine Ladungen, keine Ströme)? Der Vektor $\vec{R}$ heißt übrigens Hertzscher Vektor. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, daß die Maxwellgleichungen im Vakuum geschrieben werden können als

$$\mathrm{rot}\, \vec{Q} = \frac{i}{c} \dot{\vec{Q}}, \qquad \mathrm{div}\, \vec{Q} = 0,$$

mit imaginärer Einheit i, und

$$\vec{Q} = \vec{E} + ic\vec{B}.$$

(2 Punkte)

▷ Aufgabe 2 (Weihnachtsessay: Brechung und Reflektion) (11 Punkte)

In der Literatur wird ausführlich die Brechung und Reflektion einer ebenen Welle an einer ebenen Grenzschicht zwischen zwei Medien mit jeweils konstanten Werten $\epsilon_{1,2}$ der Dielektrizitätskonstanten hergeleitet. Fassen Sie diese Herleitung *in allen Details* und ggf. aus diversen Quellen zusammen ("wie ein Vortragsmanuskript"). Folgende Themen sollen behandelt werden

(a) Snells Brechungsgesetz

(b) Fresnels Reflektions- und Transmissionskoeffizient

(c) Brewsters Polarisationsgesetz

▷ Aufgabe 3 (Polarisation) (12 Punkte)

(a) Man schreibt die ebene-Wellenlösung der Gleichung $\Box\vec{E} = 0$ als

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \qquad \text{mit } \vec{E}, \vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3.$$

Sei

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_r + i\vec{E}_i, \qquad \text{mit } \vec{E}_r, \vec{E}_i \in \mathbb{R}^3.$$

Wie beschreiben Sie mittels $\vec{E}_r, \vec{E}_i$ linear und zirkular polarisiertes Licht? (6 Punkte)

---

[1] `http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2005/ed05/`

[2] Abgabe bis 11 Uhr in die jeweiligen Fächer der Übungsleiter im Erdgeschoss von Haus 19

Hinweis: eine zirkular polarisierte ebene Welle, die in x-Richtung läuft, ist z.B. gegeben durch

$$E_x = 0, \qquad E_y = a\cos(kx - \omega t), \qquad E_z = a\sin(kx - \omega t).$$

Hinweis: Möglicherweise hilft Ihnen die Beziehung

$$a\cos\varphi \pm b\sin\varphi = \sqrt{a^2 + b^2}\,\left(\cos\varphi' \cos\varphi \pm \sin\varphi' \sin\varphi\right)$$

weiter. Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$.

(b) Der Polarisationstensor ist definiert als

$$\underline{I} = \vec{E}_0 \otimes \vec{E}_0^*.$$

Der Stern * bedeutet das komplex konjugierte. Also ist $\underline{I}$ *hermitsch*, $\underline{I}^\dagger = \underline{I}^{\tau *} = \underline{I}$. Zeigen Sie: (i) $\underline{I}$ kann in der Form

$$\underline{I} = I_1 \hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1{}^* + I_2 \hat{e}_2 \otimes \hat{e}_2{}^*$$

dargestellt werden, mit $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$ und $\hat{e}_1, \hat{e}_2 \in \mathbb{C}^3$, wobei (ii) gilt

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

und (iii) I und $\hat{e}$ bestimmt sind durch die Eigenwertgleichungen

$$\underline{I} \cdot \hat{e}_i = I_i \hat{e}_i.$$

(1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, daß $\underline{I}$ in der Form

$$\underline{I} = \frac{I}{2}(\underline{1} + \xi_1 \underline{\sigma}_1 + \xi_2 \underline{\sigma}_2 + \xi_3 \underline{\sigma}_3),$$

geschrieben werden kann, mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ und den Paulimatrizen

$$\underline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

I ist die Intensität der Welle und ξ_1, ξ_2, ξ_3 heißen *Stokes*-Parameter, mit

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Sätze der linearen Algebra dürfen bedenkenlos benutzt werden.

d) Finden Sie die physikalische Bedeutung der ξ_i durch Betrachtung der drei Fälle

(i) $\xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = 0$, (ii) $\xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = 0$, (iii) $\xi_3 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0$.

(3 Punkte)

▷ **Aufgabe 4 (Zirkulare Polarisation)** (8 Punkte)

(a) Der $\vec{E}$-Vektor einer zirkular polarisierten, ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum hat die Komponenten

$$E_x = 0, \qquad E_y = a\cos(-kx - \omega t), \qquad E_z = a\sin(-kx - \omega t).$$

Bestimmen Sie $\vec{B}$. (3 Punkte)

(b) Die Welle fällt senkrecht auf die ebene Grenzschicht eines dielektrischen Halbraums $x < 0$ mit $\epsilon > 1, \mu = 1$. Zeigen Sie, daß die reflektierte Welle ebenfalls zirkular polarisiert ist, und finden Sie deren $\vec{E}'', \vec{B}''$. (5 Punkte)

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes Jahr 2006.