Theoretische Physik II - Elektrodynamik WS 05/06

(PD Dr. Achim Feldmeier) [1]

Übungsblatt 12 (33 Punkte) – Ausgabe: 16.01.2006, Abgabe: 23.01.2006 [2]

▷ **Aufgabe 1 (Additionstheorem & Lorentzgruppe)** (8 Punkte)

Gegeben seien drei Inertialsysteme S, S', S'' mit den Relativgeschwindigkeiten u und v, respektive. Die Bewegung aller drei Systeme erfolge entlang der x-Achse.

(a) Berechnen Sie die Lorentztransformation (vgl. Experimentalphysik 1) zwischen S und S''? Wie lautet das Additionstheorem der Geschwindigkeiten? (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass Lorentztransformationen eine multiplikative Gruppe bilden.

Hinweis: Sie können Lorentztransformationen als 4×4 Matrizen beschreiben, die Vierervektoren aufeinander abbilden. Die Definition einer mathematischen Gruppe finden Sie in Algebrabüchern. (4 Punkte)

(c) Gewinnen Sie das Additionstheorem der Geschwindigkeiten auch mittels der Darstellung der Lorentztransformation bei der relativistische Zweiervektoren $(c\,t, x)$ durch Pseudodrehung um den Winkel $\phi_v = \operatorname{arctanh}(-v/c)$ im Minkowskiraum durch

$$L_v = \begin{pmatrix} \cosh\phi_v & \sinh\phi_v \\ \sinh\phi_v & \cosh\phi_v \end{pmatrix}$$

aufeinander abgebildet werden. (2 Punkte)

▷ **Aufgabe 2 (Einsteins $E = mc^2$)** (7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll Einsteins Formel für die Ruhenergie eines Massenpunkts hergeleitet werden. Bitte beeinträchtigen Sie Ihre Entdeckerfreude nicht durch Benutzung von Lehrbüchern. Jeweils 1 Punkt.

(a) Raum- und Zeitkoordinaten werden zu einem Vierervektor (ict, x, y, z) zusammengefaßt, mit imaginärer Einheit i. Zeigen Sie die Invarianz der Länge dieses Vektors unter Lorentztransformationen.

(b) Finden Sie den Vierervektor u_μ der Geschwindigkeit, der nur aus den drei Geschwindigkeitskomponenten sowie i und c aufgebaut ist (denken Sie auch an $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$): der nichtrelativistische Grenzfall muß stimmen und die Vektorlänge muß unter Lorentztransformationen invariant sein. (Abweichungen zwischen Newtonscher Mechanik und Relativitätstheorie sind klein von Ordnung v^2/c^2.)

(c) Schreiben Sie Newtons Kraftgesetz als Relation zwischen 4-Vektoren, wobei nur die Ruhmasse, die Eigenzeit, und der 4-Geschwindigkeits- und 4-Kraftvektor auftreten.

(d) Wie lautet der Zusammenhang der drei räumlichen Komponenten des 4-Kraftvektors mit dem Newtonschen 3-Kraftvektor? *Achtung:* es ist dies derselbe Zusammenhang wie beim 4- und 3-Geschwindigkeitsvektor. Die Komponenten sind also nur im nichtrelativistischen Grenzfall gleich.

---

[1] `http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2005/ed05/`

[2] Abgabe bis 11 Uhr in die jeweiligen Fächer der Übungsleiter im Erdgeschoss von Haus 19

(e) Um die Bedeutung der zeitlichen (ersten) Komponente des 4-Kraftvektors zu finden, multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung links und rechts mit $\sum_{\mu=1}^{4} u_\mu$. Benutzen Sie die Länge von u aus (b). Wie lautet also die zeitliche Kraftkomponente?

(f) Wie lautet damit die zeitliche Komponente des relativistischen Newtonschen Gesetzes in Viererform?

(g) Ersetzen Sie das auftretende Skalarprodukt zweier 3-Vektoren mittels des Energiesatzes der klassischen Mechanik. Die kinetische Energie des Massenpunkts sollte nun sein

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}/c^2}}.$$

▷ **Aufgabe 3 (Lorentztransformation des Raumwinkels)** (9 Punkte)

(a) Ein Lichtbündel habe in einem Inertialsystem den Raumwinkel $d\Omega$. Wie lautet $d\Omega'$ bei Übergang zu einem anderen Inertialsystem?

Hinweis: Die Ergebnisse sind auszudrücken allein mit $\beta = v/c$ und dem Winkel ϑ, unter dem das Raumwinkelelement zur Bewegungsrichtung steht. Überlegen Sie wie sich $\cos\theta$ transformiert und bedenken Sie, wie sich die Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung transformieren. (6 Punkte)

(b) Es wird angenommen, daß die Sterne in unserer lokalen Umgebung homogen und isotrop verteilt sind. Wie lautet dann die Sterndichte $dN/d\Omega'$ in einem Kegel für einen Beobachter, der in einer Rakete mit nahezu Lichtgeschwindigkeit fliegt? (3 Punkte)

▷ **Aufgabe 4 (Quasistationäres Feld und Strahlungsfeld)** (9 Punkte)

Auf Übungsblatt 11 wurden die Lienard-Wiechertschen Potentiale einer bewegten Punktladung angegeben. Bestimmen Sie daraus $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Diskutieren Sie die beiden Summanden hinsichtlich ihres radialen Abfalls. Woher sind entsprechende Ausdrücke bekannt? Welche Voraussetzung ist für Wellenabstrahlung nötig?