Theoretische Physik II - Elektrodynamik WS 05/06

(PD Dr. Achim Feldmeier) [1]

Übungsblatt 13 (32 Punkte) – Ausgabe: 23.01.2006, Abgabe: 30.01.2006 [2]

▷ **Aufgabe 1 (Pulsierende Sphäre)** (4 Punkte)

Die Oberfläche einer Kugel sei homogen geladen und die Kugel pulsiere rein radial (d.h. sie ändert ihren Radius im Lauf der Zeit). Wie lautet das elektrische und magnetische Feld außerhalb des von der Kugel eingenommenen Maximalvolumens? Geben Sie hierfür nur eine physikalische Begründung an, ohne Rechnung.

Zusatzaufgabe mit 6 Bonuspunkten. (Diese Punkte zählen nicht zur maximalen Gesamtpunktzahl, Sie können damit aber Ihr Punktekonto aufbessern). Führen Sie die *explizite* Rechnung hierzu mit retardierten Potentialen aus.

▷ **Aufgabe 2 (Vierervektoren)** (10 Punkte)

(a) Man zeige, dass sich die Komponenten $x^\mu = (c\,t, \vec{x}^T)^T$ mit und $\{\mu = 0,1,2,3\}$ bei räumlichen Drehungen wie die Komponenten des dreidimensionalen Vektors $\vec{x}$ transformieren. (2 Punkte)

(b) Man zeige, dass sich die Komponenten eines antisymmetrischen Vierertensors 2. Stufe bei räumlichen Drehungen wie die Komponenten zweier unabhängiger Vektoren $\vec{p}$ (polarer Vektor) und $\vec{a}$ (axialer Vektor) des dreidimensionalen Raumes transformieren. (3 Punkte)

(c) Der Levi-Civita-Tensor 4. Stufe sei gegeben durch $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ mit

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \{\alpha\beta\gamma\delta\} \text{ in gerader Permutation} \\ -1 & \{\alpha\beta\gamma\delta\} \text{ in ungerader Permutation} \\ 0 & \text{zwei Indizes gleich} \end{cases}$$

. Man beweise die Gleichungen

1. $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\gamma\eta\rho\sigma} = 2(\delta^\rho_\alpha\,\delta^\sigma_\beta - \delta^\sigma_\alpha\,\delta^\rho_\beta)$ (1 P)
2. $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\beta\gamma\eta\sigma} = -6\,\delta^\sigma_\alpha$

(2 Punkte)

(d) Man berechne $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\eta}$. (1 Punkt)

(e) Zwei Vierervektoren A_α und B_α heißen parallel, wenn

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha} = const$$

gilt. Man zeige, dass das Verhältnis gleichnamiger Komponenten paralleler Vierervektoren eine Lorentzinvariante ist. (2 Punkte)

---

[1] `http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2005/ed05/`

[2] Abgabe bis 11 Uhr in die jeweiligen Fächer der Übungsleiter im Erdgeschoss von Haus 19

▷ Aufgabe 3 (Punktladung auf gerader Bahn (Teil 2)) (4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist die Herleitung der retardierten Potentiale für ein Elektron, das sich gleichförmig mit der konstanten Geschwindigkeit $v \cdot \vec{e}_z$ bewegt. Im Gegensatz zu Aufgabe 11.2 sollen Sie die retardierten Potentiale diesmal mit Hilfe der Lorentztransformation der Potentiale ϕ und $\vec{A}$ finden.

Hinweis: Die Potentiale können zu einem 4-Vektor

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

zusammengefasst werden.

(a) Skizzieren Sie die Situation. Überlegen Sie für welches Inertialsystem sie die Potentiale schon kennen. Welche Inertialsysteme benötigen Sie also zur Lösung der Aufgabe?

(b) Durch welche Lorentztransformation sind die zur Lösung benötigten Inertialsysteme verbunden? Wie sehen die Transformationsgleichungen für die Komponenten des 4-Potentials aus? Zeigen Sie, dass sich die retardierten Potentiale wie in Aufgabe 11.2 zu

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{-e}{\sqrt{(z - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x^2 + y^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \phi(\vec{r}, t)$$

ergeben.

▷ Aufgabe 4 (Feldstärketensor und Jacobi-Identität) (6 Punkte)

Zeigen Sie für den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

dass die Jacobiidentität $\partial^\kappa F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\kappa} + \partial^\nu F^{\kappa\mu} = 0$ und $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \, j^\nu$ mit $\{\mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$ eine Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen darstellen.

▷ **Aufgabe 5 (Gaußsches Wellenpacket)** (8 Punkte)

Es sei ein linear in z-Richtung polarisiertes Wellenpacket

$$E_z(x,t) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[A(k)\,\exp(ikx \,-\, i\omega(k)t) \,+\, A^*(k)\,\exp(-ikx \,+\, i\omega(k)t) \Big]\, dk$$

in einem dispersivem Medium gegeben. Die Dispersionsrelation laute

$$\omega(k) = b\left(1 + \frac{a^2k^2}{2}\right) \qquad .$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das Wellenpacket durch eine Einhüllende mit Gaußprofil

$$E_z(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cos(k_0 x) \qquad .$$

beschrieben. Berechnen Sie $A(k)$. Benutzen Sie $A(k)$, um $E_z(x,t)$ zu berechnen. Wie schnell bewegt sich das Maximum der Einhüllenden? Wie verändert sich die Form des Wellenpackets?