Theoretische Physik II - Elektrodynamik WS 05/06

(PD Dr. Achim Feldmeier) [1]

Übungsblatt 2 (32 Punkte) – Ausgabe: 24.10.2005, Abgabe: 01.11.2005 [2]

▷ Aufgabe 1 (Tensoralgebra) (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß die Einsdyade des $\mathbb{R}^3$ kartesisch durch

$$\underline{1} = \hat{\imath} \otimes \hat{\imath} + \hat{\jmath} \otimes \hat{\jmath} + \hat{k} \otimes \hat{k}$$

gegeben ist. (1 Punkt)

(b) Seien $\underline{S}, \underline{T}$ beliebige Dyaden und sei $\underline{S}^{-1}$ die inverse Dyade von $\underline{S}$, entsprechend für $\underline{T}$. Zeigen Sie

$$(\underline{S}\underline{T})^{-1} = \underline{T}^{-1}\underline{S}^{-1}.$$

(2 Punkte)

(c) Sei $\underline{S}_c$ die konjugierte Dyade von $\underline{S}$, entsprechend für $\underline{T}$. Zeigen Sie

$$(\underline{S} + \underline{T})_c = \underline{S}_c + \underline{T}_c,$$
$$(\underline{S}\underline{T})_c = \underline{T}_c\underline{S}_c,$$
$$(\underline{S}^{-1})_c = (\underline{S}_c)^{-1}.$$

(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie für beliebiges $\vec{r}, \underline{T}$

$$\frac{1}{2}\vec{r} \cdot (\underline{T} - \underline{T}_c) \cdot \vec{r} = 0.$$

(2 Punkte)

▷ Aufgabe 2 (Tensorintegral: Gauß) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: die Spur von $\nabla \vec{E}$ (gemeint ist der Tensor $\nabla \otimes \vec{E}$) ist $\operatorname{div} \vec{E}$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie für die kartesische Koordinate x

$$\int dV \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \oint d\vec{a} \cdot (\hat{\imath} \otimes \vec{E}).$$

(4 Punkte)

---

[1] `http://www.quantum.physik.uni-potsdam.de/teaching/ws2005/ed05/`

[2] Abgabe bis 11 Uhr in die jeweiligen Fächer der Übungsleiter im Erdgeschoss von Haus 19

▷ Aufgabe 3 (Tensoranalysis) (9 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Dyadenrelationen

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \vec{E} &= 0, \\
\nabla \cdot \nabla \times \underline{T} &= 0, \\
\nabla \cdot \nabla \vec{E} &= \Delta \vec{E}, \\
\nabla \times (\nabla \times \underline{T}) &= \nabla \nabla \cdot \underline{T} - \Delta \underline{T}, \\
\nabla (\vec{E} \cdot \vec{F}) &= \nabla \vec{E} \cdot \vec{F} + \nabla \vec{F} \cdot \vec{E}, \\
\nabla (\vec{E} \times \vec{F}) &= \nabla \vec{E} \times \vec{F} - \nabla \vec{F} \times \vec{E}.
\end{aligned}$$

▷ Aufgabe 4 (ko- und kontravariant) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit der physikalischen Definition von kontravarianten (A^i) und kovarianten Vektoren (A_i), daß (Einsteinsche Summationskonvention!)

$$A^2 = A_i A^i$$

ein Skalar ist, also koordinateninvariant. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, daß folgende Gleichung kovariant ist (gleich in jedem Koordinatensystem)

$$S^{\mu\nu}_{\nu\sigma} = T^{\mu}_{\sigma}.$$

(2 Punkte)

▷ Aufgabe 5 (δ-Funktion) (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie folgende Rechenregeln für die δ-Funktion

$$\begin{aligned}
f(x)\delta(x) &= f(0)\delta(x), \\
x\delta(x) &= 0, \\
\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x).
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{x} dy \delta(y) = \Theta(x),$$

mit $\Theta(x < 0) = 0$ und $\Theta(x > 0) = 1$: Heavisidesche Sprungfunktion. (2 Punkte)