.

THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK

Vorlesung Univ. Potsdam WS 2005/06

Achim Feldmeier

Kapitel

Benutzte Literatur

massiv:
Jackson, Classical Electrodynamics
Weatherburn, Advanced Vector Analysis

teils:
Bergmann, Introduction to the theory of relativity
Greiner, Theoretische Physik (Mechanik; Elektrodynamik)
Römer & Forger, Elementare (!) Feldtheorie
Julian Schwinger, Classical Electrodynamics
Sommerfeld, Vorlesungen über Elektrodynamik
Thierring, Lehrbuch der mathematischen Physik
Weller & Winkler, Elektrodynamik

Häufige (mehrdeutige) Symbole

$\vec{r}$ Aufpunkt: Ort, an dem Feld gemessen wird
$\vec{r}'$ Quellpunkt: Ort der Ladung, die Feld verursacht: Int.variable
$d\vec{l}, d\vec{s}$ Bogenlänge
$d\vec{a}$ infinitesimales Flächenelement
dV und d^3r infinitesimales Volumenelement
Φ Skalarfeld, Potential, magnetischer Fluß
U Vektorkomponente (U, V, W), Spannung, Vierergeschwindigkeit
V Volumen, Vektorkomponente (U, V, W), Vektorraum
$\vec{E}$ Vektorfeld, elektrische Feldstärke

Häufige Abkürzungen

Bedg = Bedingung
Def = Definition
DGL = Differentialgleichung
Dreh = Drehung
el = elektrisch
elmag= elektromagnetisch
infinit = infinitesimal
Fkt = Funktion
Geschw = Geschwindigkeit
Glg = Gleichung
Int = Integration
ko- = kovariant
kontra- = kontravariant
Koord = Koordinaten
Ldg = Ladung
Lsg = Lösung
mag = magnetisch
Trafo = Transformation
vgl = vergleiche

Plural: Glgen = Gleichungen usw. Aber Trafos = Transformationen
Zusammengesetzte Abkürzungen:
Koord.trafo.glgen = Koordinatentransformationsgleichungen

KAP 1: VEKTORANALYSIS

§1 Literatur, Einleitung

Quelle: Weatherburn, Advanced Vector Analysis (out of print).
Auch gut: erste 100 Seiten in Greiner Mechanik 1.
Für hohe Theorie (Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten):
Lang, Introduction to Differentiable Manifolds
Jänich, Vektoranalysis (Neuerscheinung)
Sternberg, Differential Geometry
Hegel, Wissenschaft der Logik I (Suhrkamp S. 322):
"Die ganze Methode der Differentialrechnung ist in dem Satze, daß $dx^n = nx^{n-1}dx$, absolviert. Man bedarf weiter nichts zu erlernen. In wenig Zeit, vielleicht in einer halben Stunde, kann man die ganze Theorie innehaben."
Einige der verbleibenden Details in diesem Ferienkurs.
Vektoranalysis:
Differenzieren und Integrieren von Vektorfeldern im Raum
Trick im folgenden: Basissystem sei orthonormal.
Also kartesische, Zylinder-, Kugel-, elliptische Koordinaten.
Lokal werden nur kartesische Systeme betrachtet.
Nichtorthonormal: Riemannscher Tensorkalkül:
Christoffelsymbole, ART

§2 Der stärkste Satz

Gegeben Glg, in der nur Skalare, Vektoren, Tensoren auftauchen.
Sowie grad, div, rot, Laplace, Richtungsableitung usw.
Ist die Glg in irgendeinem Koord.system richtig, dann in jedem.
Beweis:
(i) Skalare, Vektoren, Tensoren sind koord.unabhängig definiert.
(ii) Ebenso grad, div, rot usw. QED.
Man wählt Koord nur zur einfachen Rechnung.
Sehr oft Beweis in kartesischen Koordinaten.
In diesem Sinn ist Rechnung in kartesischen Koord oft allgemein.

§3 Erinnerung: partielles und totales Differential

Partielle Ableitung eines Skalar- und Vektorfeldes.

$$\frac{\partial \vec{E}(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{E}(x+h,y,z) - \vec{E}(x,y,z)}{h}.$$

Entsprechend $\partial \vec{E}/\partial y$ und $\partial^2 \vec{E}/\partial x \partial y$.
Durch Erweiterung mit 0 (siehe Mechanikvorlesung) findet man:
Totales Differential

$$d\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz.$$

Variablentransformation, Kettenregel

$$\frac{\partial \vec{E}(x(s,t), y(s,t))}{\partial s} = \frac{\partial \vec{E}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \vec{E}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

§4 Gradient

Sei $\Phi(x,y,z)$ stetiges Skalarfeld.
Niveauflächen $\Phi = const.$
Bilden Blätterung des Raums.
Seien P, P' infinit benachbarte Raumpunkte im Abstand δs.
Wert von $\Phi(x,y,z)$ sei Φ in P und $\Phi + \delta\Phi$ in P'.
$\delta\Phi/\delta s$ heißt Richtungsableitung (in Richtung $\hat{s}$ von P nach P').
Geschrieben $\partial\Phi/\partial s$.

```
                 ^        ^

                 n        s
                 |     /
----------Q---P'----- Phi + dPhi
                 |   /
            dn | / ds
                 |/
----------P---------- Phi
```

Ab jetzt ohne δ; stattdessen ds und $d\Phi$.
Betrachte Niveauflächen durch P und P'.
Sei Q Punkt auf $\Phi + d\Phi$ Fläche im kürzesten Abstand dn zu P.
Linie PQ steht senkrecht auf Φ *und* $\Phi + d\Phi$ Fläche.

$\partial\Phi/\partial n$ ist Richtungsableitung senkrecht zur Niveaufläche.
Diese Ableitung ist größer als Ableitung in jede schräge Richtung.
Denn

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\cos\theta.$$

θ Winkel QPP'.
Sei $\hat{n} \perp$ Niveaufläche (Richtung, in die Φ wächst).
Def Gradient

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\hat{n}.$$

Nach dieser Def ist grad unabhängig von irgendeinem Koord.system.
Sei $\vec{r}$ Ortsvektor nach P und $\vec{r} + d\vec{r}$ nach P'.
Zunahme $d\Phi$ von P nach P' ist Differenz der Niveauflächenwerte.

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial n}dn \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial n}\hat{n}\cdot d\vec{r} \\ &= d\vec{r}\cdot\nabla\Phi. \end{aligned}$$

Grundformel. Auswendig.
Wird manchmal zur Definition von grad benutzt.
Darstellung von grad in kartesischen Koordinaten:
Ansatz

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}.$$

Einsetzen gibt

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz.$$

Vgl mit oben

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}.$$

Als Operatorglg

$$\nabla\Phi = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi,$$

also

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Rechenregeln: Gradient von Summe von Fkten ist Summe der Gradienten.
Übung: zeige: Gradient eines Produkts

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi.$$

Übung: zeige

$$\nabla r = \hat{r}$$
$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Übung: zeige (sehr wichtig in Elektrodynamik)

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$
$$\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}.$$

Dabei ∇' Gradient bzgl Variable $\vec{r}\,'$ statt $\vec{r}$.
Übung: zeige: sei $\Phi = \Phi(r)$, dann

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r}.$$

Nochmals Richtung von grad:
Nach Def

$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi \cdot d\vec{r}.$$

$d\vec{r}$ liege in Niveaufläche $d\Phi = 0$. Dann

$$\operatorname{grad}\Phi \cdot d\vec{r} = 0 \to d\vec{r} \perp \operatorname{grad}\Phi.$$

Gradient steht senkrecht zu Niveauflächen.
Dies ist Richtung des stärksten Anstiegs von Φ.

§5 Richtungsableitung $\hat{s}\cdot\nabla$

Richtungsableitung in beliebige Richtung ist somit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \hat{s} \cdot \operatorname{grad} \Phi.$$

Sei

$$\hat{s} = l\hat{\imath} + m\hat{\jmath} + n\hat{k},$$

mit Richtungscosinus

$$l = \hat{s} \cdot \hat{\imath}, \quad m = \hat{s} \cdot \hat{\jmath}, \quad n = \hat{s} \cdot \hat{k}.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\hat{s} \cdot (\nabla \Phi) &= (l\hat{\imath} + m\hat{\jmath} + n\hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{k} \right) \\
&= l\frac{\partial \Phi}{\partial x} + m\frac{\partial \Phi}{\partial y} + n\frac{\partial \Phi}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Operatorschreibweise

$$\hat{s} \cdot \nabla = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}.$$

Damit ist definiert

$$\hat{s} \cdot (\nabla \Phi) = (\hat{s} \cdot \nabla)\Phi.$$

Also kann Klammer weggelassen werden.
Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial s} \equiv \hat{s} \cdot \nabla.$$

Sei $\vec{E}(x, y, z)$ stetiges Vektorfeld,

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}.$$

Änderung in Richtung $\hat{s}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Wie oben, mit Richtungscosinus von $\hat{s}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial s} = l\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + m\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + n\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = (\hat{s} \cdot \nabla)\vec{E}.$$

Achtung: Klammer kann noch nicht weggelassen werden:

$$\nabla \vec{E}$$

(ohne Punkt) ist Tensor von Rang 2, wird erst später definiert.
Übung: Zeichne und gebe Glgen für Vektorfelder $\vec{E}$, deren Richtungsableitung nicht parallel $\vec{E}$ ist.

§6 Divergenz

Hier zunächst keine koord.freie Def wie bei grad, sondern kartesisch.
Koord.freie Darstellung wird erst mit Gaußschem Integralsatz erreicht.
Daher zunächst reine Diff.Algebra von div und rot.
Erst später anschauliche Bedeutung klar.
Def in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{div} \vec{E} = \hat{\imath} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \hat{\jmath} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{E} \\ &= \hat{\imath} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \hat{\jmath} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}. \end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}.$$

Mit $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}$ folgt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Wird oft als Def benutzt.
div einer Summe ist Summe der div.

$\operatorname{div} \vec{r} = 3$.

§7 Rotation

Def in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \hat{\imath} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \hat{\jmath} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \hat{k} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}.$$

Zeige wie oben:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E}.$$

Kartesisch ausrechnen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \hat{\imath} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{\jmath} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Jetzt klar, warum rot nicht über Komponenten definiert.
Rot einer Summe ist Summe der Rot.
$\operatorname{rot} \vec{r} = 0$.

§8 div und rot von Produkten. Zweite Differentiale

Zusammenfassung bisher, kartesisch

$$\begin{aligned}
\text{grad } &= \nabla = \hat{\imath} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}, \\
\text{div } &= \nabla \cdot = \hat{\imath} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \\
\text{rot } &= \nabla \times = \hat{\imath} \times \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath} \times \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \times \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Beachte: grad wirkt auf Skalar-, div und rot auf Vektorfeld.
Übung: die folgenden Beziehungen lassen sich leicht beweisen

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\Phi \vec{E}) &= \nabla \Phi \cdot \vec{E} + \Phi \nabla \cdot \vec{E}, \\
\nabla \times (\Phi \vec{E}) &= \nabla \Phi \times \vec{E} + \Phi \nabla \times \vec{E}, \\
\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{F}) &= \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{F}, \\
\nabla \times (\vec{E} \times \vec{F}) &= (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{E} \nabla \cdot \vec{F} - \vec{F} \nabla \cdot \vec{E}, \\
\nabla (\vec{E} \cdot \vec{F}) &= (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \nabla \times \vec{E} + \vec{E} \times \nabla \times \vec{F}.
\end{aligned}$$

Auswendig

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad} &\equiv 0,\\ \operatorname{div}\operatorname{rot} &\equiv 0.\end{aligned}$$

Übung: finde je 2 Vektorfelder (Bild, Glg) für diese Relationen.
Sehr wichtig

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi = \nabla\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}\right)\\ = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Def Laplace-Operator (letzte Glg kartesisch)

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Übung: zeige

$$\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -(\vec{k}\cdot\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Definiere auch

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}.$$

Achtung: dies muß vorsichtig nach div grad aufgelöst werden:
$\nabla\vec{E}$ hat (bisher) keine Bedeutung.
Also

$$\Delta\vec{E} = (\nabla\cdot\nabla)\vec{E} \overset{?}{=} \nabla\cdot(\nabla\vec{E}).$$

Auch wichtig

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}.$$

Also sozusagen (Achtung auf Klammer)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - (\operatorname{div}\operatorname{grad})\vec{E}.$$

Wichtig in der Elektrodynamik ist $\Delta\frac{1}{r}$.

Hier nur für $r \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \\
&= -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\
&= -\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \\
&= 3\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} - \frac{3}{r^3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\Phi = 1/r$ ist Lsg der Laplaceglg

$$\Delta \Phi(r) = 0.$$

Übung: zeige für $\Phi = \Phi(r)$

$$\Delta \Phi = \Phi'' + \frac{2\Phi'}{r}.$$

§9 Orthogonal krummlinige Koordinaten

Gegeben 3 Skalarfelder

$$u(x,y,z), \qquad v(x,y,z), \qquad w(x,y,z).$$

Die Niveauflächen von jeder blättert den $\mathbb{R}^3$.
Niveauflächen sollen an jedem Punkt $\perp$ zueinander sein:
Dann kann Niveauwert als Orthogonal-Koordinate dienen.
Beachte: Achsenrichtung ändert sich von Punkt zu Punkt.
Beispiel: Zylinder- und Kugelkoordinaten.
Wähle Reihenfolge u, v, w so, daß System rechtshändig.
Seien $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ die orthogonalen Einheitsvektoren
... entlang der Schnittlinien der Niveauflächen.
Betrachte Niveauflächen $u + du, v + dv, w + dw$.
Zusammen mit Niveauflächen u, v, w geben sie 3d-Rechtecksvolumen.
Krümmung und Gestauchtheit sind Effekte d^2.
Übung: zeige durch Taylorentwicklung, daß alle Abweichungen vom Rechteck (also auch Spat-Stauchung) Differential 2. Ordnung.

Kantenlängen des Volumens seien

$$
\begin{aligned}
da &= h_1(x,y,z)du, \\
db &= h_2(x,y,z)dv, \\
dc &= h_3(x,y,z)dw.
\end{aligned}
$$

Beachte: du ist irgendein Funktionswert, nicht unbedingt Länge.
Beachte: da, db, dc lokal kartesisch.
Abstand Niveauflächen bei Zylinderkoordinaten

$$da = dr, \qquad db = rd\phi, \qquad dc = dz.$$

Also

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = 1.$$

Bei Kugelkoordinaten

$$da = dr, \qquad db = rd\theta, \qquad dc = r\sin\theta d\phi.$$

Also

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\sin\theta.$$

Das Rechtecksvolumen zwischen Niveauflächen ist also

$$dadbdc = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi.$$

```
       w
       |
      C -------------
      /|            /|
     / |           / |
    /  |          /  |
   /   |         /   |
   -------------     |
  |    |        |    |
  |   P ------------- --v
  |   /         |   /B
  |  /          |  /
  | /           | /
  |/            |/
 A ------------- D
 /
u
```

Aus Zeichnung

$$\begin{aligned}
\vec{PA} &= h_1 du \hat{a}, \\
\vec{BD} &= h_1 du \hat{a} + \frac{\partial}{\partial v}(h_1 du \hat{a}) dv, \\
\vec{PB} &= h_2 dv \hat{b}, \\
\vec{AD} &= h_2 dv \hat{b} + \frac{\partial}{\partial u}(h_2 dv \hat{b}) du.
\end{aligned}$$

Summe der 4 Vektoren entlang Rechtecksrand muß 0 sein, daher

$$\frac{\partial}{\partial u}(h_2 \hat{b}) = \frac{\partial}{\partial v}(h_1 \hat{a}).$$

Entsprechend durch Rechnung oder Permutation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(h_3 \hat{c}) &= \frac{\partial}{\partial w}(h_1 \hat{a}), \\
\frac{\partial}{\partial v}(h_3 \hat{c}) &= \frac{\partial}{\partial w}(h_2 \hat{b}).
\end{aligned}$$

Bilde Skalarprodukt der ersten mit $\hat{b}$,

$$\hat{b} \cdot \left(\frac{\partial h_2}{\partial u} \hat{b} + h_2 \frac{\partial \hat{b}}{\partial u} \right) = \hat{b} \cdot \left(\frac{\partial h_1}{\partial v} \hat{a} + h_1 \frac{\partial \hat{a}}{\partial v} \right).$$

Weil Orthogonalkoordinaten,

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = 0.$$

Außerdem

$$\hat{b} \cdot \frac{\partial \hat{b}}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\hat{b} \cdot \hat{b})}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial 1}{\partial u} = 0.$$

Also

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = h_1 \hat{b} \cdot \frac{\partial \hat{a}}{\partial v}.$$

Multipliziere die zweite obere Glg skalar mit $\hat{c}$

$$\hat{c} \cdot \left(\frac{\partial h_3}{\partial u} \hat{c} + h_3 \frac{\partial \hat{c}}{\partial u} \right) = \hat{c} \cdot \left(\frac{\partial h_1}{\partial w} \hat{a}) + h_1 \frac{\partial \hat{a}}{\partial w} \right).$$

Also

$$\frac{\partial h_3}{\partial u} = h_1 \hat{c} \cdot \frac{\partial \hat{a}}{\partial w}.$$

Durch Permutation oder Rechnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial v} &= h_2 \hat{a} \cdot \frac{\partial \hat{b}}{\partial u}, \\
\frac{\partial h_3}{\partial v} &= h_2 \hat{c} \cdot \frac{\partial \hat{b}}{\partial w}, \\
\frac{\partial h_1}{\partial w} &= h_3 \hat{a} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial u}, \\
\frac{\partial h_2}{\partial w} &= h_3 \hat{b} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Diese 6 Relationen im folgenden als (I) zitiert.

§10 grad, div, rot, Δ in krummlinigen Koordinaten

Im folgenden E_1, E_2, E_3 statt E_x, E_y, E_z.
Oben eingeführt $a, b, c \equiv x, y, z$ und

$$\hat{a} \equiv \hat{\imath}, \qquad \hat{b} \equiv \hat{\jmath}, \qquad \hat{c} \equiv \hat{k}$$

und

$$da = h_1 du, \qquad db = h_2 dv, \qquad dc = h_3 dw.$$

Damit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial w}.$$

Also Gradient

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi &= \hat{a}\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \hat{b}\frac{\partial \Phi}{\partial b} + \hat{c}\frac{\partial \Phi}{\partial c} \\
&= \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\hat{a} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\hat{b} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial w}\hat{c}.
\end{aligned}$$

Dies ist Gradient in krummlinigen Koordinaten.
Z.B. Kugelkoordinaten

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{r \sin\theta \partial \phi}\hat{e}_\phi.$$

Sei

$$\hat{n} = n_1\hat{a} + n_2\hat{b} + n_3\hat{c}.$$

Dann Richtungsableitung in Richtung $\hat{n}$,

$$\vec{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{n_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{n_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{n_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

Divergenz

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} &= \hat{a}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial a} + \hat{b}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial b} + \hat{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial c} \\
&= \left(\hat{a}\cdot\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{b}\cdot\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{c}\cdot\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial w}\right)(E_1\hat{a} + E_2\hat{b} + E_3\hat{c}).
\end{aligned}$$

Wieder $\hat{a}\frac{\partial\hat{a}}{\partial u} = 0$ usw.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} = &\frac{1}{h_1}\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{h_2}\hat{b}\cdot\frac{\partial\hat{a}}{\partial v} + \frac{E_1}{h_3}\hat{c}\cdot\frac{\partial\hat{a}}{\partial w} \\
&+ \frac{1}{h_2}\frac{\partial E_2}{\partial v} + \frac{E_2}{h_1}\hat{a}\cdot\frac{\partial\hat{b}}{\partial u} + \frac{E_2}{h_3}\hat{c}\cdot\frac{\partial\hat{b}}{\partial w} \\
&+ \frac{1}{h_3}\frac{\partial E_3}{\partial w} + \frac{E_3}{h_1}\hat{a}\cdot\frac{\partial\hat{c}}{\partial u} + \frac{E_3}{h_2}\hat{b}\cdot\frac{\partial\hat{c}}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Mit (I) wird daraus

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} = &\frac{1}{h_1}\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{E_1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u} + \frac{E_1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u} \\
&+ \frac{1}{h_2}\frac{\partial E_2}{\partial v} + \frac{E_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v} + \frac{E_2}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial v} \\
&+ \frac{1}{h_3}\frac{\partial E_3}{\partial w} + \frac{E_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial w} + \frac{E_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Genaues Hinschauen

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3E_1) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3h_1E_2) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2E_3)\right].$$

Ist Divergenz in orthogonalen krummlinigen Koordinaten.
Für Δ braucht man nur grad und div kombinieren

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{div}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\hat{a} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\hat{b} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\hat{c}\right) \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right].
\end{aligned}$$

Für rot findet man

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3E_3) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2E_2)\right]\hat{a} + \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_1E_1) - \frac{\partial}{\partial u}(h_3E_3)\right]\hat{b} + \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2E_2) - \frac{\partial}{\partial v}(h_1E_1)\right]\hat{c}.$$

Bisher: grad, div, rot aus Differentialdef.
Nur grad war einfach; div, rot waren verwickelt.
div, rot einfacher aus Int.def.

§11 Ko- und Kontravariant. Skalenfaktoren h_i

In diesem § nichtorthogonale Koord.systeme erlaubt.
Begriff ko-/kontravariant recht subtil.
Bereits in SRT (und damit Elektrodynamik) nötig:
Wegen Diagonale $1, -1, -1, -1$ des metrischen Tensors.
Hier nach Greiner.
Seien x, y, z bzw x_1, x_2, x_3 kartesische Koord.
q_1, q_2, q_3 krummlinige Koor, statt bisher u, v, w.
Sei Ortsvektor

$$\vec{r}(x_j) = \vec{r}(x_j(q_i)) \equiv \vec{r}(q_i).$$

Achtung: links und rechts verschiedene Fkten (besser   oder $'$).
Def *kontravariante Einheitsvektoren* (auswendig)

$$\hat{e}_i = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|}.$$

Liegen in Richtung der Koord.linien.
Koord.linien sind Schnitte der Koord.flächen.
Z.B. Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Also

$$\hat{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Damit

$$\hat{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{r\sin\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachte jetzt Koord.flächen

$$q_i = const.$$

Def *kovariante Einheitsvektoren*

$$\hat{E}_i = \frac{\nabla q_i}{|\nabla q_i|}.$$

Kovariante Einheitsvektoren stehen $\perp$ zu Koord.flächen.
Vgl kontravariant: liegen entlang Koord.linien.
Für nichtorthogonale Systeme kovariant $\neq$ kontravariant.
Betrachte z.B. Koord $\xi = x, \zeta = x + y$ der Ebene.

```
                      kontravar                kovariant
                      ---------                ---------
                                               a
      y                                        .
     /  /  /  /  /         .b      Einheits    .
    /__/__/__/__/         .        vektoren    .
   /  /  /  /  /         .                     .
  /__/__/__/__/         .                         .
 /  /  /  /  /         ........a                     .b
/__/__/__/__/__x

nichtorthogonales                                /
 Koordinatennetz                               y/.
                        /                      /    .
                      y/. . . . *             /        *
                      /        .   Koordi    /         .
                     /        .    naten    /          .
                    /        .             /           .
                   /________.___          /______________
                            x                          x
```

Wir hatten definiert (dort: $da = h_1 du$)

$$ds_i = h_i dq_i,$$

Bogenlänge ds_i bei Koord.änderung dq_i.
Def “kontravariant” umstellen und $ds_i \equiv |d\vec{r}|$ benutzen

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \hat{e}_i = h_i \hat{e}_i.$$

Mit $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \\ &= h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_1 + h_3 dq_3 \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Gesamtbogenlänge

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} h_i h_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j dq_i dq_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dq_i dq_j .
\end{aligned}
$$

$\underline{g}$ heißt metrischer Tensor: Theorie von Gauß, Riemann.
Elemente sind

$$g_{ij} = h_i h_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j .$$

Jetzt wieder nur Orthogonalkoord

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

also

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 .$$

Volumenelement Orthogonalkoord.

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 .$$

§12 Gradient krummlinig

Nach Greiner.
Sei $\Phi = \Phi(q_1, q_2, q_3)$.
Gesucht

$$\nabla \Phi \equiv f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 + f_3 \hat{e}_3 .$$

Es gilt von oben

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_1 + h_3 dq_3 \hat{e}_3 .$$

Ferner nach Def

$$d\Phi = \nabla \Phi \cdot d\vec{r}.$$

Einsetzen und Orthogonalität der Basis (!) benutzen

$$d\Phi = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3.$$

Andererseits nach Def totales Differential

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} dq_3.$$

f_i aus Koeffizientenvergleich und damit

$$\nabla \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \hat{e}_3.$$

Wichtiger Trick: setze speziell $\Phi = q_i$. Dann

$$\nabla q_i = \frac{\hat{e}_i}{h_i}.$$

Also gezeigt: für orthonormale Basis ist

$$\hat{E}_i = \hat{e}_i.$$

In Orthonormalkoord sind ko- und kontravariante Basen gleich.
Hilfssatz: für Orthogonalkoord gilt

$$\hat{e}_1 = h_2 h_3 \nabla q_2 \times \nabla q_3, \qquad \text{und zyklisch.}$$

Beweis:

$$h_2 h_3 \nabla q_2 \times \nabla q_3 = h_2 h_3 \left(\frac{\hat{e}_2}{h_2} \times \frac{\hat{e}_3}{h_3} \right) = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1.$$

§13 Div in Orthogonalkoord

Greiner. Gesucht

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot (E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 + E_3 \hat{e}_3).$$

Erinnerung

$$\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}.$$

und

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0.$$

Damit

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (E_1 \hat{e}_1) &= \nabla \cdot (E_1 h_2 h_3 \nabla q_2 \times \nabla q_3) \\
&= \nabla (E_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) + E_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) \\
&= \nabla (E_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\hat{e}_2}{h_2} \times \frac{\hat{e}_3}{h_3} \right) + 0 \\
&= \nabla (E_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \left[\left(\frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) (E_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 h_2 h_3).
\end{aligned}
$$

Insgesamt wieder

$$
\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (E_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (E_3 h_1 h_2) \right].
$$

§14 Rot in krummlinigen Orthogonalkoordinaten

Greiner.

$$
\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (E_1 \hat{e}_1) + \nabla \times (E_2 \hat{e}_2) + \nabla \times (E_3 \hat{e}_3).
$$

Betrachte

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (E_1 \hat{e}_1) &= \nabla \times (E_1 h_1 \nabla q_1) \\
&= \nabla (E_1 h_1) \times \nabla q_1 + E_1 h_1 \nabla \times \nabla q_1 \\
&= \nabla (E_1 h_1) \times \frac{\hat{e}_1}{h_1} + 0 \\
&= \left[\left(\frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) (E_1 h_1) \right] \times \frac{\hat{e}_1}{h_1} \\
&= \frac{\hat{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} (E_1 h_1) - \frac{\hat{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (E_1 h_1).
\end{aligned}
$$

Insgesamt wie zuvor,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{h_2h_3}&\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3E_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2E_2)\right]\hat{e}_1\\ &+ \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1E_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3E_3)\right]\hat{e}_2\\ &\quad+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2E_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1E_1)\right]\hat{e}_3.\end{aligned}$$

grad, div, rot, Δ in Zylinder- und Kugelkoordinaten:
Innendeckel von Jackson.
Übung: zeige entsprechend

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right].$$

§15 Erster Integralsatz: Zirkulation von Gradientenfelder

Neues Kapitel: Integrale von Vektorfeldern.
Mathematik: Linienintegral entlang Kurve

$$\int_A^B d\vec{l}\cdot\vec{E}$$

wobei $d\vec{l}$ Kurventangente ist.
Natürlich

$$\int_A^B d\vec{l}\cdot\vec{E} = -\int_B^A d\vec{l}\cdot\vec{E}.$$

Für Gradienten

$$\int_A^B d\vec{l}\cdot\operatorname{grad}\Phi = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A.$$

wobei $d\Phi$ Niveauunterschied zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}+d\vec{r}$ auf Kurve.
Also

$$\oint d\vec{l}\cdot\operatorname{grad}\Phi = 0.$$

Der Umkehrschluß gilt auch:
Wenn

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

für *alle* Wege in Gebiet des $\mathbb{R}^3$, dann dort $\vec{E} = \operatorname{grad}\Phi$.
Beweis: Betrachte geschlossene Kurve $APRQ$.
Aus $\oint = 0$ folgt $\int_{APR} = \int_{AQR}$.
Überhaupt haben alle Integrale $\int_A^R$ denselben Wert.
Sei A fest und R mit Ortsvektor $\vec{r}$ variabel.
Dann kann man Funktion $\Phi(\vec{r})$ definieren,

$$\Phi(\vec{r}) = \int_A^R d\vec{l} \cdot \vec{E}.$$

Wert hängt nur von A und R, nicht von Zwischenweg ab.
Besser: $\Phi_A(\vec{r})$.
Wählt man Anfangspunkt B, dann $\Phi_B = \Phi_A + C$, mit $C = \int_A^B$.
Verschiebung $d\vec{r}$ von R gibt einerseits nach Def von grad

$$d\Phi = d\vec{r} \cdot \nabla\Phi,$$

andererseits nach Def von Φ

$$d\Phi = d\vec{r} \cdot \vec{E}.$$

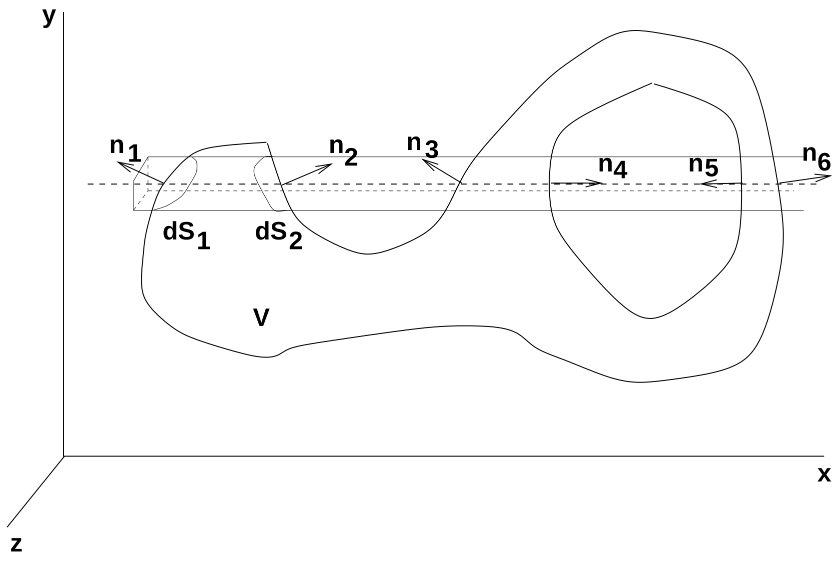
Diese Gleichheit für alle $d\vec{r}$, also

$$\vec{E} = \nabla\Phi.$$

§16 Zweiter Integralsatz: Gauß

Betrachte *geschlossene* Fläche S.
Keine Abschnürungen = keine Singularitäten.
Vollständig in der Fläche dürfen andere geschlossene Flächen liegen.
Gaußscher Satz

$$\oint d\vec{a} \cdot \vec{E} = \int dV \operatorname{div} \vec{E}.$$



$d\vec{a}$ ist Flächennormale.
Konvention: soll von Volumen dV der rechten Seite wegzeigen.
$d\vec{a} \cdot \vec{E}$ ist Projektion von $\vec{E}$ auf Flächennormale.
dV ist *inneres* Volumenelement.

Beweis.
Reicht in kartesischen Koordinaten:
Der Satz ist koord.unabhängig, und gilt dann in allen Koord.
Sei

$$\vec{E} = E_x \hat{\imath} + E_y \hat{\jmath} + E_z \hat{k}$$

und

$$I = \int dxdydz \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Betrachte Rechteckssäule mit Querschnittsfläche

$$[y, y+dy] \times [z, z+dz]$$

entlang der gesamten x-Richtung (feste y, z).
Säule schneidet Außenrand und Innenränder von S $2n$ mal.
(Dabei n zunächst unbekannt.)
Grund: alle Flächen sind geschlossen.
E_x habe an Schnittflächen Werte $E_{x,1}, \ldots, E_{x,2n}$.

Dann

$$I = \int dydz(-E_{x,1} + E_{x,2} - E_{x,3} + \ldots - E_{x,2n-1} + E_{x,2n}).$$

Dies nach Def Stammfkt.
Beachte: Integration nur innerhalb V.
Eintritt bei $x_1, x_3, x_5, \ldots$: jeweils Untergrenze $(-)$,
Austritt bei $x_2, x_4, x_6, \ldots$: jeweils Obergrenze $(+)$.
Rechteckssäule schneidet Flächen $d\vec{a}_1, \ldots, d\vec{a}_{2n}$ aus Randflächen.
Also

$$dydz = \hat{i} \cdot d\vec{a}_i.$$

Genauer: $dydz > 0$ immer. Aber $\hat{i} \cdot d\hat{a}_1 < 0$:
Flächen*eintritt* heißt: $d\vec{a}$ ist gegen $\hat{i}$ gerichtet.
Austritt: $d\vec{a}$ gleichgerichtet $\hat{i}$.
Also

$$\begin{aligned} dydz &= -\hat{i} \cdot d\vec{a}_1, \\ &= \hat{i} \cdot d\vec{a}_2, \\ &\vdots \\ &= -\hat{i} \cdot d\vec{a}_{2n-1}, \\ &= \hat{i} \cdot d\vec{a}_{2n}. \end{aligned}$$

Einsetzen

$$I = \int \sum_{i=1}^{2n} d\vec{a}_i \cdot \hat{i} E_{x,i}.$$

Es ist

$$\int \sum d\vec{a}_i \equiv \oint d\vec{a}.$$

Nämlich links und rechts Summe über alle Oberflächenelemente.
Also

$$I = \int dxdydz \frac{\partial E_x}{\partial x} = \oint d\vec{a} \cdot \hat{i} E_x.$$

Genauso

$$\int dxdydz \frac{\partial E_y}{\partial y} = \oint d\vec{a} \cdot \hat{\jmath} E_y,$$
$$\int dxdydz \frac{\partial E_z}{\partial z} = \oint d\vec{a} \cdot \hat{k} E_z.$$

Glgen addieren

$$\int dxdydz \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \oint d\vec{a} \cdot (E_x \hat{\imath} + E_y \hat{\jmath} + E_z \hat{k}).$$

Kann koord.invariant geschrieben werden

$$\int dV \operatorname{div} \vec{E} = \oint d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

Gaußscher Satz.

§17 Integraldef der Divergenz. Fluß

Sei dV infinitesimal, so daß $\vec{E}$ in dV konstant.
Dann wird Gaußscher Satz

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{dV} \oint d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

Dient als alternative Def von div.
Rechte Seite ist koord.unabhängig, also auch div.
Allgemein:
Sei $\vec{E}$ Vektorfeld und $d\vec{a}$ Flächenelement.
Sei (noch nicht zu sehr als Ladung lesen)

$$Q = \oint d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

Im Zusammenhang mit div nennt man $\vec{E}$ den *Q-Fluß* und

$$d\vec{a} \cdot \vec{E}$$

Q-Strom durch $d\vec{a}$.
Elektrodynamik: Stromdichte $\vec{\jmath}$: Ladung/(Zeit×Fläche),

Leiterquerschnitt $\vec{A} \| \vec{j}$.
Strom (Ladung Q/Zeit) $I = \vec{A} \cdot \vec{j}$.
(Ladungs-)Stromdichte $\vec{j}$ ist also Ladungsfluß.

§18 Kontinuitätsgleichung

1. Betrachte Erhaltungsgröße Q, die nur strömen kann: keine Quellen und Senken.
Soll durch kart Volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ strömen.
Volumenzentrum $(0,0,0)$. Konkret: Massenerhaltung.
Massendichte ρ in g/cm^3, Strömungsgeschw (u, v, w).
Masse, die in Zeit δt durch Fläche $\delta y \delta z$ bei $\delta x/2$ strömt

$$\delta y \delta z \rho(\delta x/2, 0, 0, t) u(\delta x/2, 0, 0, t) \delta t.$$

Und bei $-\delta x/2$

$$\delta y \delta z \rho(-\delta x/2, 0, 0, t) u(-\delta x/2, 0, 0, t) \delta t.$$

Also Netto (Ausströmen positiv)

$$\begin{aligned} &[(\rho u)(\delta x/2, 0, 0, t) - (\rho u)(-\delta x/2, 0, 0, t)] \delta y \delta z \delta t \\ &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}(0, 0, 0, t) \delta V \delta t. \end{aligned}$$

Entsprechend in y- und z-Richtung.
Insgesamt Massenänderung an irgendeiner Stelle

$$\delta(\rho \delta V)(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right](\vec{r}, t) \delta V \delta t$$

$-$ weil Ausströmen: Verlust positiv gerechnet.
δV konst, kann vors Differential gezogen werden

$$\frac{\delta \rho}{\delta t}(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right](\vec{r}, t).$$

Also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Heißt Kontinuitätsgleichung.

Ist mathematische Formulierung der Massenerhaltung.
Hier $Q \equiv$ Masse.
$\rho\vec{v}$ ist Massenfluß und

$$\oint_S d\vec{a} \cdot \rho\vec{v}$$

ist Massenstrom (g/s) durch Randfläche S eines Volumens.
Also ist Massenstrom aus Volumen dV nach Def von div

$$dV \,\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}).$$

Dafür manchmal auch "Durchfluß".
2. So für jede Erhaltungsgröße:
sei e Energiedichte (Energie/Volumen).
Gesamtenergie $\int dV e$ (hier Q) erhalten; kann nur fließen.
Dann wieder für festes Volumen

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,(e\vec{v}) = 0,$$

und

$$\oint_S d\vec{a} \cdot e\vec{v} = dV \,\mathrm{div}\,(e\vec{v})$$

als Energiestrom aus Volumen dV.
3. Insbesondere gilt Kontinuitätsglg für Strom.
Hier Ladungsdichte ρ (Ladung/Volumen) und Stromdichte

$$\vec{j} = \rho\vec{v}.$$

Dann (auswendig)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0.$$

Zusammenfassung:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\int_S d\vec{a} \cdot \vec{E}}{dV} = \frac{Q\mathrm{-Strom\ aus\ } dV}{dV}.$$

Wenn $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$: Zufluß = Abfluß; keine Quellen und Senken.

§19 Alternativbeweis Satz von Gauß

Mit koord.freier Def

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{dV} \oint d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

ist Gaußscher Satz fast trivial.
Zerlege jedes V in infinitesimale dV_i.
Dürfen nichtkartesisch sein.
Dann

$$\int dV \operatorname{div} \vec{E} \equiv \sum_i dV_i \operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \oint d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

Betrachte $\sum_i$:
Jedes innere $d\vec{a}$ ist Rand von genau zwei Volumenzellen.
Vorzeichen von $d\vec{a} \cdot \vec{E}$ für beide Zellen verschieden:
Also heben sich alle inneren Beiträge.
Nur Integral über Randflächen bleibt:
dort nur eine benachbarte, nämlich innere Volumenzelle.
Also

$$\int_V dV \operatorname{div} \vec{E} = \oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E}.$$

Rechtes Integral nur über Rand von V.
Ab- und Zufluß benachbarter Volumenzellen hebt sich auf.
Nettofluß nur am Volumenrand.

§20 Dritter Integralsatz: Stokes

Sei C geschlossene Kurve, die offene Fläche S berandet.
S muß nicht eben sein.
Jedes C berandet ∞ viele S.
Z.B. berandet Äquator die Äquatorebene der Erde,
...und die nördliche und südliche Hemisphäre.
Sei $d\vec{a}$ Flächenelement von S.
Wenn C in irgendeinem Sinn durchlaufen wird,
... soll $d\vec{a}$ im Rechtssinn zeigen: Orientierbarkeit.

Satz von Stokes

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_S d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Beweis

```
            v+
         ........
      .    |  |    .C
    .      ^b |  S    .
   . v+dv  |  |       .
   .-------|--|-------.
u- .       |da|ds2    . u+
   .-------|--|--->---.
   .  v    |ds1   a   .
    .      |  |      .
      .   u|  |u+du.
         ..|..|..
            v-
```

Seien u, v (oder q_1, q_2) Skalarfelder auf $\mathbb{R}^3$ mit $\perp$ Niveauflächen.
Schnitt der Niveauflächen mit S gibt 2 $\perp$ Koord.linien.
Niveauflächen von S, u, v sollen nie zusammenfallen.
Betrachte infinit Rechteck am Schnitt der Koord.linien auf S.
Seitenlängen

$$ds_1 = h_1 du,$$
$$ds_2 = h_2 dv,$$

Fläche

$$da = h_1 h_2 du dv.$$

Seien $\hat{a}, \hat{b}$ Einheitsvektoren tangential an Koord.linien.
Sei $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b}$, so daß $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ Rechtssystem.
Sei $\vec{r}$ Ortsvektor zu Punkt auf S im infinit Rechteck.
Dann kontravariante Basisvektoren

$$\hat{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},$$
$$\hat{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Beachte: dies sind wirklich schon Einheitsvektoren.
Def von rot

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \hat{a}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial s_1} + \hat{b}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial s_2} + \hat{c}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial s_3}.$$

Also mit zyklischer Permutation im Spatprodukt

$$\begin{aligned}\hat{c}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} &= (\hat{c}\times\hat{a})\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial s_1} + (\hat{c}\times\hat{b})\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial s_2}\\ &= \hat{b}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{h_1\partial u} - \hat{a}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{h_2\partial v}.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}I &\equiv \int d\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}\\ &= \int da\hat{c}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}\\ &= \int dudv\left(h_2\hat{b}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial u} - h_1\hat{a}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial v}\right)\\ &= \int dudv\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)\\ &= \int dudv\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)\right].\end{aligned}$$

Jetzt Geometrie:
Integriere ersten Term über u:
Integral von einem Rand von S zum Rand gegenüber.
Endpunkte sollen Werte $u_\pm$ haben.
Integriere zweiten Term über v:
Integral von einem Rand von S zum Rand gegenüber
... entlang Weg, der ersten Weg $\perp$ kreuzt.
Endpunkte sollen Werte $v_\pm$ haben. Dann

$$\begin{aligned}I = &\int dv\left[\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)(u_+) - \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)(u_-)\right]\\ &- \int du\left[\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)(v_+) - \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)(v_-)\right].\end{aligned}$$

u_+, u_- haben denselben v-Wert, v_+, v_- denselben u-Wert.
Laufe entlang S im positiven Umlaufsinn:
dv bei u_+, $-dv$ bei u_-, entsprechend für du.
Also Beitrag zu Umlaufintegral

$$\begin{aligned} I = &\int dv \left[\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) (u_+) + \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) (u_-) \right] \\ &- \int du \left[\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) (v_+) + \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) (v_-) \right]. \end{aligned}$$

In v-Integral wird jeder Punkt von S einmal abgefahren.
Ebenso im u-Integral.
Also

$$I = \oint \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \right) = \oint d\vec{r} \cdot \vec{E}.$$

Identifikation $d\vec{r} = d\vec{l}$: beide Bogenelement entlang C.
Also Stokesscher Satz

$$\int d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}.$$

Übung: zeige Umkehrung des Satzes: sei

$$\int_S d\vec{a} \cdot \vec{F} = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E}$$

für alle C in $\mathbb{R}^3$. Dann $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$.

§21 Integraldef von rot

Betrachte infinitesmales und daher ebenes $d\vec{a}$.
Alternative Def von rot mit Satz von Stokes

$$d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}.$$

§22 Alternativbeweis Satz von Stokes

Beginnt man mit dieser Def von rot, ist Stokesscher Satz fast trivial:
Lege krummliniges Netz auf S mit infinit Maschen, Laufindex i.

(Details in Mechanikvorlesung.)
Z.B. Nordhalbkugel, Rand ist Äquator.

$$\int_S d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \equiv \sum_i d\vec{a}_i \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \sum_i \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}.$$

Jedes innere Stück “Faden” berandet zwei Maschen.
Bei gleichem Maschenumlauf verschiedene Richtung entlang Schnur.
Also heben sich innere Beiträge zu $d\vec{l} \cdot \vec{E}$.
Es bleibt nur Integral über Außenrand.

$$\int_S d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{E}.$$

Jedoch Jänich, Vector Analysis:
“Although the idea of decomposition into cells does *not* lead to an elegant proof, it describes the geometric content of the theorem extremely well – in fact, it reduces the theorem at the intuitive level to a truism.”

§23 Vektoridentitäten

Mit Integraldef von div und rot kann man Beweis führen für

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$$

ohne Differentialausdruck dieser Größen zu benutzen:
1. Integralbeweis für

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Nämlich

$$\int_S d\vec{a} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint d\vec{l} \cdot \operatorname{grad} \Phi \stackrel{\text{no Zirk}}{=} 0.$$

(Gradientenfelder haben keine Zirkulation.)
Da S beliebig, muß

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

2. Integralbeweis für

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Nämlich

$$\int dV \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} \overset{\text{Gauß}}{=} \oint d\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \overset{\text{Stokes}}{=} 0.$$

Grund für letzte Glg:
Ziehe irgendeine geschlossene Kurve auf S (ohne $\times$).
Definiert zwei "Hemisphären".
Nach Stokes ist Oberflächenintegral über beide gleich:
denn sie haben gleichen Rand.
Aber verschiedenes Vorzeichen: also Summe 0.
Einfacher: geschlossene Flächen haben keine Randkurve.

§24 Div in krummlinigen Koordinaten

Dieser Paragraph als Übung:
Mit Integraldef von div.

§25 Rot in krummlinigen Koordinaten

Dieser Paragraph als Übung:
Mit Integraldef von rot (siehe Mechanikvorlesung).
Weil rot Vektoroperator, muß man 3 Projektionen betrachten:
Zuerst Flächenelement $d\vec{a} = \hat{a} h_2 h_3 dv dw$.
Linienintegral über Flächenrand:
Geometrie (Rechtssystem, yz-Ebene):

```
         w+dw
D  -----<-----  C
  |           |
 c            |
 ^|      .a   ^
v ||          | v+dv
  |           |
  |           |
A  ----->-----  B
     --->b
       w
```

Beitrag von DA:

$$\hat{c} \cdot \vec{E} h_3 (-dw) = -E_3 h_3 dw$$

usw.

KAP 2: TENSORANALYSIS

Wichtige Tensoren der Physik:
1. Richtungsableitung
2. total schiefsymmetrischer Tensor
3. Spannungstensor
4. Scherungstensor (Reibung in Kontinua)
5. Quadrupolmoment
6. Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$
7. Energie-Impuls-Tensor
8. Metrischer Tensor
9. Krümmungstensor

Die Hälfte davon in dieser Vorlesung.

§26 Lineare Vektorfunktionen

Sei $\vec{r}$ Vektor.
Lineare Abb. $\vec{r} \mapsto \vec{r}'$ heißt lineare Vektorfunktion.
Mit Basisdarstellung

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

werden lin Vektorfkten dargestellt durch Matrizen $\underline{A} = (a_{ij})$.
Im folgenden $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ Orthonormalsystem.
Also

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Alternative Schreibweise

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z, \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z. \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} x' &= \vec{a} \cdot \vec{r}, \\ y' &= \vec{b} \cdot \vec{r}, \\ z' &= \vec{c} \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\vec{r}\,' &= x'\,\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}\\ &= \hat{\imath}(\vec{a}\cdot\vec{r}) + \hat{\jmath}(\vec{b}\cdot\vec{r}) + \hat{k}(\vec{c}\cdot\vec{r}).\end{aligned}$$

§27 Dyadisches Produkt. Dyaden

Durch eine einzige scheinbar triviale Umklammerung in einem Dreierprodukt
...bekommt man das mächtige Werkzeug der Dyaden.
Tensoralgebra ohne Indizes.
Vereinbarung: Dyaden und Tensoren von Rang/Stufe 2 sind Synonyme.
3 Möglichkeiten, Tensoren einzuführen:
1. Tensor aus dyadischen Produkten von Vektoren.
2. Tensor als (multi-)lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen.
3. Tensor als Objekt mit bestimmtem Verhalten unter Koord.trafo.
Definiere dyadisches Produkt durch Umklammern

$$\begin{aligned}\vec{r}\,' &= \hat{\imath}(\vec{a}\cdot\vec{r}) + \hat{\jmath}(\vec{b}\cdot\vec{r}) + \hat{k}(\vec{c}\cdot\vec{r})\\ &= (\hat{\imath}\otimes\vec{a})\cdot\vec{r} + (\hat{\jmath}\otimes\vec{b})\cdot\vec{r} + (\hat{k}\otimes\vec{c})\cdot\vec{r}.\end{aligned}$$

Die Terme in Klammern heißen Dyaden, Symbol $\underline{T}$.
Dieselbe Def einfacher

$$(\vec{a}\otimes\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Verallgemeinerung: Dyade ist jedes

$$\underline{T} = \vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{c}\otimes\vec{d} + \dots$$

Dyadenaddition

$$\vec{r}\,' = [\hat{\imath}\otimes\vec{a} + \hat{\jmath}\otimes\vec{b} + \hat{k}\otimes\vec{c}]\cdot\vec{r}.$$

Bisher wirkte Dyade auf Vektor nach rechts.
Dieselbe Dyade (nicht eine andere Art!) wirkt auch nach links:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\otimes\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}.$$

Da $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, ist

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}).$$

Dyade kann nach links und rechts wirken, man muß jeweils sagen, wohin.
Ist Wirkung einer Dyade nach rechts = Wirkung anderer Dyade nach links:
dann nennt man die Dyaden *konjugiert* (Index c)

$$\underline{T} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \underline{T}_c.$$

Def: Zwei Dyaden heißen gleich $\leftrightarrow$
Ihre Wirkungen auf alle Vektoren links *und* rechts sind gleich.
Zusammenfassung: lineare Vektorfunktion = Dyade = 2-Tensor.
Deren Basisdarstellung ist Matrix.
Warnung: in engl. und amerik. Büchern wird $\otimes$ weggelassen:
Stehen 2 Vektoren nebeneinander ohne $\cdot$ oder $\times$, wird $\otimes$ verstanden.
Mit einiger Übung sinnvoll, nicht am Anfang.
Rechenregeln: Linearität nach Def

$$\underline{T} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\underline{T} \cdot \vec{u}) + \beta(\underline{T} \cdot \vec{v}).$$

Dyaden werden mit Vektorraumstruktur ausgestattet:
Addition von Dyaden und Multiplikation mit Grundkörperelement:

$$(\alpha\underline{S} + \beta\underline{T})(\vec{u}) = \alpha(\underline{S} \cdot \vec{u}) + \beta(\underline{T} \cdot \vec{u}).$$

Distributivität

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \otimes (\vec{b} + \vec{c})] \cdot \vec{r} &= \vec{a}[(\vec{b} + \vec{c})] \cdot \vec{r}] \\
&= \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r} + \vec{c} \cdot \vec{r}) \\
&= \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r}) + \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{r}) \\
&= (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{r} + (\vec{a} \otimes \vec{c}) \cdot \vec{r} \\
&= (\vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a} \otimes \vec{c}) \cdot \vec{r},
\end{aligned}$$

also

$$\vec{a} \otimes (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a} \otimes \vec{c}.$$

Damit

$$(\vec{a}+\vec{b}+\dots)\otimes(\vec{p}+\vec{q}+\dots) = \\ \vec{a}\otimes\vec{p}+\vec{a}\otimes\vec{q}+\dots+\vec{b}\otimes\vec{p}+\vec{b}\otimes\vec{q}+\dots$$

Reihenfolge der Faktoren wichtig.
Übung: definiere "Minus" für Dyaden.
Somit jede Dyade darstellbar als

$$\begin{aligned}\underline{T} &= a_{11}\hat{\imath}\otimes\hat{\imath}+a_{12}\hat{\imath}\otimes\hat{\jmath}+a_{13}\hat{\imath}\otimes\hat{k}\\ &+a_{21}\hat{\jmath}\otimes\hat{\imath}+a_{22}\hat{\jmath}\otimes\hat{\jmath}+a_{23}\hat{\jmath}\otimes\hat{k}\\ &+a_{31}\hat{k}\otimes\hat{\imath}+a_{32}\hat{k}\otimes\hat{\jmath}+a_{33}\hat{k}\otimes\hat{k}.\end{aligned}$$

Ist praktisch schon ihre Matrixdarstellung.
Sei

$$\underline{T} = \vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{c}\otimes\vec{d}+\dots$$

Def Kontraktion einer Dyade (Tensorkontraktion): der Skalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}+\dots.$$

Ist unabhängig von Basis (denn hängt nur von Vektoren ab).
Als Skalar Invariante, also wichtig in Physik:
Ändert sich nicht bei Koord.trafo.
Übung: zeige in Orthogonalkoord.: Kontraktion ist Spur $\sum T_{ii}$.
Def *Kontraktion* zweier Dyaden (Tensoren).
Jede bestehe zur Einfachheit nur aus einem Summanden.

$$(\vec{a}\otimes\vec{b}):(\vec{c}\otimes\vec{d}) = (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\otimes\vec{d}).$$

Entspricht Matrixmultiplikation.
Für mehrere Summanden in jeder Dyade: ausmultiplizieren.
Übung: zeige Assoziativgesetz (mehrere Summanden)

$$(\underline{R}:\underline{S}):\underline{T} = \underline{R}:(\underline{S}:\underline{T}).$$

Übung: zeige

$$\underline{1} = \hat{\imath}\otimes\hat{\imath}+\hat{\jmath}\otimes\hat{\jmath}+\hat{k}\otimes\hat{k}$$

ist identische Dyade,

$$\underline{1}\vec{r} = \vec{r}.$$

Def *inverse Dyade.* Wenn

$$\underline{S} : \underline{T} = \underline{1},$$

nennt man $\underline{T}$ invers zu $\underline{S}$,

$$\underline{T} = \underline{S}^{-1}.$$

Übung: zeige:

$$\underline{S} : \underline{T} = \underline{1} \leftrightarrow \underline{T} : \underline{S} = \underline{1}.$$

Übung: zeige: Inverse eines direkten Dyadenprodukts (Kontraktion) = Produkt der Inversen in umgekehrter Reihenfolge.

§28 Konjugierte Dyaden

Def war

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}.$$

$\vec{a} \leftrightarrow \vec{b}$ umbenennen in 2. Zeile

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
$$\vec{c} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{a}) = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}.$$

Die rechten Seiten sind jetzt gleich, also

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{a})$$

Dafür hatten wir geschrieben

$$\underline{T} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \underline{T}_c.$$

Also:

$$\underline{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} \leftrightarrow \underline{T}_c = \vec{b} \otimes \vec{a}.$$

Bei Summen von $\vec{a}_i \otimes \vec{b}_i$ jedes Produkt vertauschen.
Übung: zeige

$$(\underline{S} + \underline{T})_c = \underline{S}_c + \underline{T}_c,$$
$$(\underline{ST})_c = \underline{T}_c \underline{S}_c,$$
$$(\underline{S}^{-1})_c = (\underline{S}_c)^{-1}.$$

Def *selbstkonjugierte* Dyade

$$\underline{S} = \underline{S}_c.$$

Also

$$\underline{S} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \underline{S}.$$

Oder

$$\sum \vec{a}_i \otimes \vec{b}_i = \sum \vec{b}_i \otimes \vec{a}_i.$$

Def *antiselbstkonjugierte* Dyade

$$\underline{S} = -\underline{S}_c.$$

Also

$$\underline{S} \cdot \vec{r} = -\vec{r} \cdot \underline{S}_c.$$

Oder

$$\sum \vec{a}_i \otimes \vec{b}_i = -\sum \vec{b}_i \otimes \vec{a}_i.$$

Satz: jede Dyade ist $\sum$ von selbstkonj und antiselbstkonj Dyade.
Beweis: schreibe

$$\underline{T} = \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{T}_c) + \frac{1}{2}(\underline{T} - \underline{T}_c).$$

Erster Summand ist selbstkonjugiert

$$(\underline{T} + \underline{T}_c)_c = \underline{T}_c + \underline{T}.$$

Zweiter Summand ist antiselbstkonjugiert.

Satz: jede selbstkonjugierte Dyade über $\mathbb{R}^3$ ist darstellbar als

$$a_1 \hat{\imath} \otimes \hat{\imath} + a_2 \hat{\jmath} \otimes \hat{\jmath} + a_3 \hat{k} \otimes \hat{k}.$$

Beweis (nicht kurz) in der Linearen Algebra:
Jede symmetrische Matrix kann auf Diagonalform gebracht werden.

§29 Kreuzprodukt und antiselbstkonj Dyaden

In E-Dynamik wichtig und offensichtlich richtig:
Jede antiselbstkonjugierte Dyade kann dargestellt werden als

$$\sum_i (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_i - \vec{b}_i \otimes \vec{a}_i).$$

Erinnerung: Entwicklungssatz für Vektor(kreuz)produkt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Damit (verzichte auf Index i wegen Übersichtlichkeit)

$$\begin{aligned} \sum (\vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}) \cdot \vec{r} &= \sum \left[\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{r}) \right] \\ &= - \sum (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{r} \\ &= - \left(\sum \vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Produkt antiselbstkonj Dyade mit Vektor = 2faches Kreuzprodukt.
Vgl entsprechende Aussage in Mechanik.
In der E-Dynamik bei mag Dipolmoment benötigt.
(NB: zuvor war Skalar einer Dyade definiert als

$$\sum \vec{a} \otimes \vec{b} \to \sum \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Def Vektor einer Dyade

$$\sum \vec{a} \otimes \vec{b} \to \sum \vec{a} \times \vec{b}.$$

Übung: zeige: Skalar und Vektor einer Dyade ändern sich bei Koord.trafo nicht.)

Def Kreuzprodukt von Dyade und Vektor

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \times \vec{r} = \vec{a} \otimes (\vec{b} \times \vec{r}),$$
$$\vec{r} \times (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{r} \times \vec{a}) \otimes \vec{r}.$$

Reines Umklammern, *nicht* wie bei Def Dyade $\cdot \leftrightarrow \otimes$
Satz:

$$\underline{T} \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = (\underline{T} \times \vec{r}) \cdot \vec{s}.$$

Erinnerung Spatprodukt: zyklisches Vertauschen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

also Operatorvertauschung erlaubt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Im obigen Satz genauso.
Beweis für Satz: sei $\underline{T} = \sum \vec{a} \otimes \vec{b}$. Dann

$$\begin{aligned}
\underline{T} \cdot (\vec{r} \times \vec{s}\,) &= \left(\sum \vec{a} \otimes \vec{b} \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{s}\,) \\
&= \sum [(\vec{a} \otimes \vec{b}\,) \cdot (\vec{r} \times \vec{s}\,)] \\
&= \sum \vec{a}\, [\vec{b} \cdot (\vec{r} \times \vec{s}\,)] \\
&= \sum \vec{a}\, [(\vec{b} \times \vec{r}\,) \cdot \vec{s}\,] \\
&= \sum \vec{a}\, [(\vec{b} \times \vec{r}\,) \cdot \vec{s}\,] \\
&= \sum [\vec{a} \otimes (\vec{b} \times \vec{r}\,)] \cdot \vec{s} \\
&= \sum [(\vec{a} \otimes \vec{b}\,) \times \vec{r}\,] \cdot \vec{s} \\
&= \left[\sum (\vec{a} \otimes \vec{b}\,) \times \vec{r} \right] \cdot \vec{s} \\
&= (\underline{T} \times \vec{r}\,) \cdot \vec{s}.
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$(\vec{r} \times \vec{s}) \cdot \underline{T} = \vec{r} \cdot (\vec{s} \times \underline{T}).$$

Oben gezeigt: antiselbstkonj Dyaden und Doppelkreuzprodukt.

Jetzt stärkere Aussage: antiselbstkonj Dyaden und Einfachkreuzprodukt.
Satz: Jeder Vektor $\vec{a}$ in Kreuzprodukt mit $\vec{r}$ kann durch Skalarprodukt mit einer antiselbstkonj Dyade mit $\vec{r}$ ersetzt werden.
Beweis:

$$\vec{a} \times \vec{r} = (\underline{1} \cdot \vec{a}) \times \vec{r} = (\underline{1} \times \vec{a}) \cdot \vec{r}$$

Zeige noch: $\underline{1} \times \vec{a}$ ist antiselbstkonj. Sei kartesisch

$$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k},$$
$$\underline{1} = \hat{i} \otimes \hat{i} + \hat{j} \otimes \hat{j} + \hat{k} \otimes \hat{k}.$$

Ausrechnen (Rechtssystem!) gibt

$$\begin{aligned} &\vec{a} \times \underline{1} = \underline{1} \times \vec{a} = \\ &\quad - a_1(\hat{j} \otimes \hat{k} - \hat{k} \otimes \hat{j}) - a_2(\hat{k} \otimes \hat{i} - \hat{i} \otimes \hat{k}) - a_3(\hat{i} \otimes \hat{j} - \hat{j} \otimes \hat{i}). \end{aligned}$$

Ist antiselbstkonj.
Nicht verwirren lassen von

$$\vec{a} \times \underline{1} = \underline{1} \times \vec{a}.$$

Dennoch gilt

$$(\vec{a} \times \underline{1})_c = -\vec{a} \times \underline{1}.$$

Zusammenfassung: merke

$$\vec{a} \times \vec{r} = (\underline{1} \times \vec{a}\,) \cdot r,$$

wobei Def

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \otimes (\vec{b} \times \vec{a}).$$

Übung: zeige

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{c} - \vec{c} \otimes \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \times veca.$$

§30 Physik: Kreuzprodukt und schiefsymmetrische Tensoren

Derselbe Satz, wie er in der Physik bewiesen wird:
Jeder schiefsymmetrische Tensor 2. Stufe auf $\mathbb{R}^3$
$\leftrightarrow$ Vektorkreuzprodukt.
Beweis:
Kartesische Darstellung schiefsymm Tensor $\underline{T}$ 2. Stufe

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & T_{xy} & T_{xz} \\ -T_{xy} & 0 & T_{yz} \\ -T_{xz} & -T_{yz} & 0 \end{pmatrix}.$$

Angewendet auf Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$\underline{T} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} T_{xy}a_y + T_{xz}a_z \\ -T_{xy}a_x + T_{yz}a_z \\ -T_{xz}a_x - T_{yz}a_y. \end{pmatrix}$$

Kann man schreiben als

$$\vec{q} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} q_y a_z - q_z a_y \\ q_z a_x - q_x a_z \\ q_x a_y - q_y a_x \end{pmatrix},$$

wenn man identifiziert

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{yz} \\ T_{xz} \\ -T_{xy} \end{pmatrix}.$$

Also für schiefsymmetrische $\underline{T}$

$$\underline{T} \cdot \vec{a} = \vec{q} \times \vec{a}.$$

§31 Dyadeninvarianten

Gegeben sei Dyade in Koordinatendarstellung $\underline{T} = T_{ij}$.
Die folgenden Skalare sind in jedem Koordinatensystem gleich:
1. Spur $\sum T_{ii}$.
2. Determinante $\det \underline{T}$.
3. Eigenwerte λ, bestimmt durch

$$\det(\underline{T} - \lambda \underline{1}) = 0.$$

§32 Dyaden und Ellipsoide

Wie in Mechanikvorlesung:
geometrische Deutung der Dyaden als Ellipsoide.
Wieder sehr elegant in Weatherburn:
Was ist allgemeinste skalare quadratische Ausdruck in x, y, z?

$$Q = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz.$$

Sieht wie selbstkonjugierter Dyade aus.
Sei $\vec{r} = (x, y, z)^T$.
Allgemeinste skalare quadratische Ausdruck ist

$$Q = \sum_i [p_i \vec{r} \cdot \vec{r} + q_i(\vec{r} \cdot \vec{a}_i)(\vec{r} \cdot \vec{b}_i)].$$

Umschreiben

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i [\vec{r} \cdot (p_i \underline{1}) \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot (q_i \vec{a}_i \otimes \vec{b}_i) \cdot \vec{r}] \\ &= \vec{r} \cdot \left[\sum_i (p_i \underline{1} + q_i \vec{a}_i \otimes \vec{b}_i) \right] \cdot \vec{r} \\ &= \vec{r} \cdot \underline{T} \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

Übung: zeige

$$\frac{1}{2} \vec{r} \cdot (\underline{T} - \underline{T}_c) \cdot \vec{r} = 0.$$

Also bleibt nur selbstkonj Anteil $\underline{T} + \underline{T}_c$ obiger Dyade.
Nach Satz über Diagonalisierung selbstkonj Dyaden:

$$Q = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2.$$

Sind $a_1, a_2, a_3, Q > 0$, ist dies Glg eines Ellipsoids.
Sonst Hyperpoloid.

§33 Definition $\nabla\vec{v}$

Bisher Tensoralgebra, jetzt: Tensoranalysis.
Ziel: Satz von Gauß und Stokes für Dyaden (Tensoren).

Gradient eines Skalarfelds war definiert als

$$\nabla\Phi = \hat{\imath}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Def Gradient eines Vektorfeldes

$$\nabla\vec{E} = \hat{\imath}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + \hat{\jmath}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + \hat{k}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}.$$

Schreibweise $\nabla\otimes\vec{E}$ ist (leider) unüblich.
Def konjugierte Dyade

$$\vec{E}\,\nabla = \frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\otimes\hat{\imath} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial y}\otimes\hat{\jmath} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\otimes\hat{k}.$$

Sei $\vec{c}$ *konstanter* Vektor. Dann

$$\begin{aligned}(\nabla\vec{E})\cdot\vec{c} &= \left(\sum\hat{\imath}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\right)\cdot\vec{c}\\ &= \sum\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}\cdot\vec{c})\\ &= \nabla(\vec{E}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Also genau wie in Tensoralgebra

$$(\nabla\otimes\vec{E})\cdot\vec{c} = \nabla(\vec{E}\cdot\vec{c}).$$

Aber $\vec{c}$ muß konstant sein.
Für beliebiges Vektor*feld* $\vec{a}(\vec{r})$ gilt

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\nabla\vec{E}) &= \vec{a}\cdot\sum\hat{\imath}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\\ &= a_1\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + a_2\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + a_3\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\\ &= (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{E}.\end{aligned}$$

Sehr wichtige Relation in der ganzen Physik:
Richtungsableitung (in Richtung $\hat{a}$) eines Vektorfeldes $\vec{E}$.
Beachte:

$$(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{E} \nparallel \vec{E}.$$

Hier ist Nablakalkül etwas irritierend, weil man denkt:
$\vec{a} \cdot \nabla \equiv \alpha$ (Skalar), also

$$\alpha \vec{E} \| \vec{E}.$$

Richtig ist

$$(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{E} = \vec{a} \cdot (\nabla \otimes \vec{E}) = \vec{a} \cdot (\nabla \vec{E}).$$

Rechte Seite i.a. weder $\|\vec{E}$ noch $\|\vec{a}$.
Mit dieser Def von $\nabla \vec{E}$:
Klammern um ∇ auch bei Vektoren nicht mehr nötig.

$$(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{E} = \vec{a} \cdot (\nabla \vec{E}) = \vec{a} \cdot \nabla \vec{E}.$$

Wichtige Formel für Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot \nabla \vec{E} &= (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) \cdot \left(\hat{i} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \hat{j} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \hat{k} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz = d\vec{E}. \end{aligned}$$

Ist gleiche Formel wie für Skalarfelder

$$d\vec{r} \cdot \nabla \Phi = d\Phi.$$

Übung: zeige: Spur von $\nabla \vec{E}$ ist $\operatorname{div} \vec{E}$.

§34 Richtungsableitung

Wiederholung und elementare Rechnung.
Operator $\hat{n} \cdot \nabla$ in vielen Glgen der Physik:
Richtungsableitung in Richtung $\hat{n}$ (beliebiger Einheitsvektor).
Def für Skalarfeld Φ

$$(\hat{n} \cdot \nabla)\Phi(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(\vec{r} + h\hat{n}) - \Phi(\vec{r})}{h}.$$

Dies ist aber nach Def von grad

$$(\hat{n} \cdot \nabla)\Phi = \hat{n} \cdot (\nabla \Phi).$$

Kartesisch, mit $\hat{n} = (l, m, n)^\tau$,

$$(\hat{n} \cdot \nabla)\Phi = l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Also Operator

$$\hat{n} \cdot \nabla = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}.$$

Def Richtungsableitung für Vektorfelder

$$(\hat{n} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{E}(\vec{r} + h\hat{n}) - \vec{E}(\vec{r})}{h}.$$

Vektor $\vec{E}$ wird auf nichtparallelen Vektor abgebildet.
$\hat{n} \cdot \nabla$ auf Vektoren angewendet ist Tensoroperator.
Nur ein Fall wo man keine Tensoren braucht:

$$(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\, E^2 - \vec{E} \times \mathrm{rot}\, \vec{E},$$

wobei $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$.
Übung: beweise die Glg in kartesischen Koordinaten.
In der Elektrodynamik braucht man die Glg bei Alfvenwellen in Plasmen.
Zurück zum allgemeinen Fall:
Definiere Tensor $\nabla\vec{E}$ durch

$$(\hat{n} \cdot \nabla)\vec{E} = \hat{n} \cdot (\nabla\vec{E}).$$

Kartesisch wird dies, mit $\partial_x = \partial/\partial x$ usw.,

$$\begin{pmatrix} l\partial_x + m\partial_y + n\partial_z & 0 & 0 \\ 0 & l\partial_x + m\partial_y + n\partial_z & 0 \\ 0 & 0 & l\partial_x + m\partial_y + n\partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} =$$

$$(l, m, n) \begin{pmatrix} \partial_x E_x & \partial_x E_y & \partial_x E_z \\ \partial_y E_y & \partial_y E_y & \partial_y E_z \\ \partial_z E_z & \partial_z E_y & \partial_z E_z \end{pmatrix}.$$

Auf Transponierungssymbol τ verzichtet.
Berechne $\hat{n} \cdot \nabla$ und $\nabla\vec{E}$ in Zylinderkoord.

Dazu Zylindereinheitsvektoren durch kartesische ausgedrückt

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \quad \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j},\\
\hat{\phi} &= -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j},\\
\hat{z} &= \hat{k}.
\end{aligned}$$

Gradient in Zylinderkoordinaten ist

$$\operatorname{grad}\Phi = \hat{r}\partial_r\Phi + \hat{\phi}r^{-1}\partial_\phi\Phi + \hat{z}\partial_z\Phi.$$

Schreibe

$$\begin{aligned}
\hat{n} &= n_r\hat{r} + n_\phi\hat{\phi} + n_z\hat{z},\\
\vec{E} &= E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}.
\end{aligned}$$

Jetzt Anwendung von grad nur auf Skalare und Vektorkomponenten:

$$\begin{aligned}
(\hat{n}\cdot\nabla)\vec{E} &= (\hat{n}\cdot\nabla)(E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z})\\
&= \hat{r}(\hat{n}\cdot\nabla)E_r + \hat{\phi}(\hat{n}\cdot\nabla)E_\phi + \hat{z}(\hat{n}\cdot\nabla)E_z\\
&\qquad + E_r\big(n_r\partial_r + r^{-1}n_\phi\partial_\phi + n_z\partial_z\big)\hat{r}\\
&\qquad + E_\phi\big(n_r\partial_r + r^{-1}n_\phi\partial_\phi + n_z\partial_z\big)\hat{\phi}\\
&\qquad + E_z\big(n_r\partial_r + r^{-1}n_\phi\partial_\phi + n_z\partial_z\big)\hat{z}\\
&= \qquad (1.\ \text{Zeile})\\
&\quad + \frac{E_r}{r}\big[0 + n_\phi(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}) + 0\big]\\
&\quad + \frac{E_\phi}{r}\big[0 - n_\phi(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) + 0\big]\\
&\quad + E_z[0+0+0]\\
&= \qquad (1.\ \text{Zeile}) + \frac{n_\phi E_r}{r}\hat{\phi} - \frac{n_\phi E_\phi}{r}\hat{r}.
\end{aligned}$$

Also in Zylinderkoordinaten

$$(\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{v}}\vec{E} = \hat{r}\left[(\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}}E_r - \frac{n_\phi E_\phi}{r}\right] + \hat{\phi}\left[(\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}}E_\phi + \frac{n_\phi E_r}{r}\right] + \hat{z}(\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}}E_z.$$

Hier (nur hier) sollen Subscripts v und s anzeigen:
$\vec{n}\cdot\nabla$ wirkt auf Vektor *oder* Skalar.

Dabei $(\hat{n}\cdot\nabla)_s$ wie oben angegeben.
Wendet man dies auf Mechanik an, dann:
Zentrifugalkraft und Corioliskraft:
geometrische Krümmungsterme der Koord.linien.
Tensor $\hat{n}\cdot\nabla$ in Zylinderkoord

$$(\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} (\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}} & -r^{-1}n_\phi & 0 \\ r^{-1}n_\phi & (\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{n}\cdot\nabla)_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}.$$

Ferner

$$\nabla\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_r E_r & \partial_r E_\phi + E_\phi/r & \partial_r E_z \\ r^{-1}\partial_\phi E_r - E_\phi/r & r^{-1}\partial_\phi E_\phi & r^{-1}\partial_\phi E_z \\ \partial_z E_r & \partial_z E_\phi & \partial_z E_z \end{pmatrix}.$$

§35 ∇ auf Dyaden

Def (Leibnizregel für Dyaden)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}\otimes\vec{F}) = \frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\otimes\vec{F} + \vec{E}\otimes\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}.$$

Entsprechend für Summen von Dyaden.
Damit Def

$$\nabla\cdot\underline{T} = \hat{\imath}\cdot\frac{\partial\underline{T}}{\partial x} + \hat{\jmath}\cdot\frac{\partial\underline{T}}{\partial y} + \hat{k}\cdot\frac{\partial\underline{T}}{\partial z},$$
$$\nabla\times\underline{T} = \hat{\imath}\times\frac{\partial\underline{T}}{\partial x} + \hat{\jmath}\times\frac{\partial\underline{T}}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial\underline{T}}{\partial z}.$$

Erste Zeile: Vektor. Zweite Zeile: Dyade.
Übung: zeige

$$\nabla(\vec{a}\otimes\vec{b}) = (\nabla\cdot\vec{a})\vec{b} + (\nabla\cdot\vec{b})\vec{a}.$$

Sei $\vec{c}$ konstanter Vektor. Dann

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\underline{T})\cdot\vec{c} &= \left(\sum\hat{\imath}\cdot\frac{\partial\underline{T}}{\partial x}\right)\cdot\vec{c} \\ &= \sum\hat{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\underline{T}\cdot\vec{c}) \\ &= \mathrm{div}\,(\underline{T}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Def

$$\underline{T} \cdot \nabla = \frac{\partial \underline{T}}{\partial x} \cdot \hat{\imath} + \frac{\partial \underline{T}}{\partial y} \cdot \hat{\jmath} + \frac{\partial \underline{T}}{\partial z} \cdot \hat{k},$$

$$\underline{T} \times \nabla = \frac{\partial \underline{T}}{\partial x} \times \hat{\imath} + \frac{\partial \underline{T}}{\partial y} \times \hat{\jmath} + \frac{\partial \underline{T}}{\partial z} \times \hat{k}.$$

Übung: zeige

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \vec{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \nabla \times \underline{T} &= 0, \\ \nabla \cdot \nabla \vec{E} &= \Delta \vec{E}, \\ \nabla \times (\nabla \times \underline{T}) &= \nabla\nabla \cdot \underline{T} - \Delta \underline{T}. \end{aligned}$$

Ab sofort soll ∇ nur auf unmittelbar folgenden Vektor wirken.
Außer wenn Klammerung anderes sagt.
Übung: zeige

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{F}) &= \nabla \vec{E} \cdot \vec{F} + \nabla \vec{F} \cdot \vec{E}, \\ \nabla(\vec{E} \times \vec{F}) &= \nabla \vec{E} \times \vec{F} - \nabla \vec{F} \times \vec{E}. \end{aligned}$$

Übung: zeige (Skalarfeld Φ)

$$\begin{aligned} \nabla(\Phi \vec{E}) &= \nabla \Phi \otimes \vec{E} + \Phi \nabla \vec{E}, \\ \nabla \cdot (\Phi \underline{T}) &= \nabla \Phi \cdot \underline{T} + \Phi \nabla \cdot \underline{T}, \\ \nabla \times (\Phi \underline{T}) &= \nabla \Phi \times \underline{T} + \Phi \nabla \times \underline{T}, \\ \nabla \cdot (\underline{1} \times \vec{E}) &= \nabla \times \vec{E}, \\ \nabla \times (\underline{1} \times \vec{E}) &= \vec{E} \nabla - \underline{1} \nabla \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

§36 Satz von Stokes für Dyaden

Kurvenintegral einer Dyade. Mit

$$d\vec{E} = d\vec{l} \cdot \nabla \vec{E}$$

macht folgendes unmittelbar Sinn:

$$\vec{E}_B - \vec{E}_A = \int_A^B d\vec{l} \cdot \nabla \vec{E}.$$

Integral entlang beliebiger Kurve von A nach B.
Also

$$\oint d\vec{l} \cdot \nabla \vec{E} = 0.$$

Beweis des Satzes von Stokes bleibt richtig, wenn man ersetzt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \to \nabla \times \underline{T} = \hat{a} \times \frac{\partial \underline{T}}{\partial s_1} + \hat{b} \times \frac{\partial \underline{T}}{\partial s_2} + \hat{c} \times \frac{\partial \underline{T}}{\partial s_3}.$$

Also Satz von Stokes für Dyaden (2-Tensoren)

$$\int d\vec{a} \cdot \nabla \times \underline{T} = \oint d\vec{l} \cdot \underline{T}$$

Beachte: Reihenfolge ist wichtig:
$d\vec{l}$ und $\underline{T}$ nicht vertauschbar.

§37 Satz von Gauß für Dyaden

Im Beweis des Gaußschen Satzes wurde gezeigt (Rechteckssäule)

$$\int dV \frac{\partial E_x}{\partial x} = \oint d\vec{a} \cdot \hat{\imath} E_x.$$

Derselbe Beweis mit $U \to \vec{E}$ gibt

$$\int dV \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \oint d\vec{a} \cdot (\hat{\imath} \otimes \vec{E}). \tag{37.1}$$

Übung: führe dies explizit durch.
Entsprechende Glgen für y- und z-Richtung.
Darstellung einer Dyade

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= T_{11} \hat{\imath} \otimes \hat{\imath} + T_{12} \hat{\imath} \otimes \hat{\jmath} + T_{13} \hat{\imath} \otimes \hat{k} \\
&\quad + T_{21} \hat{\jmath} \otimes \hat{\imath} + T_{22} \hat{\jmath} \otimes \hat{\jmath} + T_{23} \hat{\jmath} \otimes \hat{k} \\
&\quad + T_{31} \hat{k} \otimes \hat{\imath} + T_{32} \hat{k} \otimes \hat{\jmath} + T_{33} \hat{k} \otimes \hat{k} \\
&= \hat{\imath} \otimes (T_{11} \hat{\imath} + T_{12} \hat{\jmath} + T_{13} \hat{k}) \\
&\qquad + \hat{\jmath} \otimes (T_{21} \hat{\imath} + T_{22} \hat{\jmath} + T_{23} \hat{k}) \\
&\qquad\quad + \hat{k} \otimes (T_{31} \hat{\imath} + T_{32} \hat{\jmath} + T_{23} \hat{k}) \\
&\equiv \hat{\imath} \otimes \vec{E} + \hat{\jmath} \otimes \vec{F} + \hat{k} \otimes \vec{G}.
\end{aligned}$$

Jede Dyade kann also als

$$\underline{T} = \hat{\imath} \otimes \vec{E} + \hat{\jmath} \otimes \vec{F} + \hat{k} \otimes \vec{G}$$

geschrieben werden, mit Vektorfelder $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$.
Damit

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \underline{T} &= \hat{\imath} \cdot \frac{\partial \underline{T}}{\partial x} + \hat{\jmath} \cdot \frac{\partial \underline{T}}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial \underline{T}}{\partial z} \\
&= \hat{\imath} \cdot \left(\hat{\imath} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \hat{\jmath} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \hat{k} \otimes \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \dots \right) \\
&= (\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + (\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + (\hat{\imath} \cdot \hat{k}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \\
&+ (\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}) \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + (\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}) \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + (\hat{\jmath} \cdot \hat{k}) \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \\
&+ (\hat{k} \cdot \hat{\imath}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + (\hat{k} \cdot \hat{\jmath}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + (\hat{k} \cdot \hat{k}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Also mit (37.1)

$$\begin{aligned}
\int dV \nabla \cdot \underline{T} &= \int dV \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} \right) \\
&= \oint d\vec{a} \cdot (\hat{\imath} \otimes \vec{E} + \hat{\jmath} \otimes \vec{F} + \hat{k} \otimes \vec{G}) \\
&= \oint d\vec{a} \cdot \underline{T}.
\end{aligned}$$

Dies ist Gaußscher Satz für Dyaden

$$\int dV \nabla \cdot \underline{T} = \oint d\vec{a} \cdot \underline{T}.$$

Ein anderer interessanter Satz folgt so:

Multipliziere (37.1) mit $\hat{i}\otimes$

$$\begin{aligned}\int dV\hat{i}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} &= \oint\hat{i}\otimes[d\vec{a}\cdot(\hat{i}\otimes\vec{E})]\\ &= \oint\hat{i}\otimes[(d\vec{a}\cdot\hat{i})\vec{E}]\\ &= \oint(d\vec{a}\cdot\hat{i})(\hat{i}\otimes\vec{E})\\ &= \oint[(d\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i}]\otimes\vec{E}\\ &= \oint[d\vec{a}\cdot(\hat{i}\otimes\hat{i})]\otimes\vec{E}.\end{aligned}$$

Hierbei wurde 2mal Def dyadisches Produkt verwendet.
Die akribische Klammerung gestattet 2fache dyadische Produkte: nie wirklich 3-Tensoren (obwohl auch möglich und erlaubt).
Genauso für y- und z-Richtung (mit $\hat{j}\otimes$ und $\hat{k}\otimes$).
Glgen addieren

$$\begin{aligned}&\int dV\left(\hat{i}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+\hat{j}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}+\hat{k}\otimes\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\right)=\\ &=\oint\left[d\vec{a}\cdot(\hat{i}\otimes\hat{i}+\hat{j}\otimes\hat{j}+\hat{k}\otimes\hat{k})\right]\otimes\vec{E}\\ &=\oint[d\vec{a}\cdot\underline{1}]\otimes\vec{E}.\end{aligned}$$

Also

$$\int dV\nabla\vec{E}=\oint d\vec{a}\otimes\vec{E}.$$

Schöner wäre, wenn man auch links $\otimes$ schriebe.
Übung: zeige Gaußschen Satz für Vektoren statt Dyaden durch $\hat{i}\cdot$ statt $\hat{i}\times$.
Zusammenfassung:
Zirkulationssatz (grad), Gaußscher (div) und Stokesscher (rot) Satz:

Für Vektoren und Dyaden gilt

$$\oint d\vec{l} \cdot \operatorname{grad} \Phi = 0,$$

$$\int dV \nabla \cdot \vec{E} = \oint d\vec{a} \cdot \vec{E},$$

$$\int d\vec{a} \cdot \nabla \times \vec{E} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E},$$

$$\oint d\vec{l} \cdot \nabla \vec{E} = 0,$$

$$\int dV \nabla \cdot \underline{T} = \oint d\vec{a} \cdot \underline{T},$$

$$\int d\vec{a} \cdot \nabla \times \underline{T} = \oint d\vec{l} \cdot \underline{T}.$$

Also perfekte Korrespondenz Vektor- und Tensorintegralsätze.

§38 Quellfreiheit

Wichtig für Magnetostatik (Multipolentwicklung):
Sei $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ und $\vec{j} = 0$ außerhalb eines endlichen Bereichs.
Dann

$$\int d^3 r \vec{j}(vecr) = 0.$$

Beweis 1. Da Vektorglg, reicht kartesischer Beweis.
Komponentenweise

$$\begin{aligned}
\int d^3 r j_x &= \int d^3 r \vec{j} \cdot \hat{i} \\
&= \int d^3 r \vec{j} \cdot \nabla x \\
&= \int d^3 r (\vec{j} \cdot \nabla x + x \nabla \cdot \vec{j}) \\
&= \int d^3 r \nabla \cdot (\vec{j} x) \\
&= \oint_\infty d\vec{a} (\vec{j} x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ebenso für j_y, j_z. Also $d^3r\vec{j} = 0$.

Beweis 2 ist viel eleganter: mit Dyaden.

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^3r\vec{r}\nabla\cdot\vec{j} \\
&= \int d^3r\left[\nabla\cdot(\vec{j}\otimes\vec{r}) - 3\vec{j}\right] \\
&= \int_\infty d\vec{a}\cdot(\vec{j}\otimes\vec{r}) - 3\int d^3r\vec{j} \\
&= -3\int d^3r\vec{j}.
\end{aligned}$$

Achtung: in Schwingers Buch fehlt Faktor 3.

§39 Physikalische Def von kontravarianten Tensoren

Die folgenden §§ nach Hay, Vector and Tensor Analysis.
Klassische Einführung von Tensoren hat sich in Büchern erhalten.
Vor allem aus der ART:
Tensoren sind Objekte, die sich bei Koord.trafo soundso verhalten.
Gegeben Koord x^i und Koord.trafo

$$x'^i = x'^i(x^j).$$

Gemeint: jedes x'^i ist Funktion *aller* x^j.
Also

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Betrachte Vektor

$$d\vec{r} = (dx^i).$$

Trafoverhalten

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Allgemeine Def:

Zahlentupel A^i heißt *Vektor*, wenn bei Koord.trafo

$$A'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j.$$

Def *Tensor* 2. Stufe über $\mathbb{R}^n$:
(1) quadratisches Schema T^{ij} von n^2 Zahlen,
(2) das sich bei Koord.trafo so transformiert

$$T'^{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl}.$$

Entsprechend Tensoren höherer Stufe.
Vektor ist dann Tensor erster Stufe.
Skalar Tensor nullter Stufe.
Genauer sind dies die *kontravarianten* Vektoren und Tensoren.

§40 Physikalische Def von kovarianten Tensoren

Jetzt erstmals untere Vektorindizes:
Def: Tupel A_i ist *kovarianter Vektor*, wenn es sich so transformiert

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j.$$

Zwei Änderungen gegenüber kontravariant:
(1) x und x' von Nenner nach Zähler u.u. vertauscht.
(2) Summationsindex von Nenner nach Zähler vertauscht.
Der Gradient ist ein kovarianter Vektor:
Sei $\Phi(x^i)$ Skalarfeld. Dann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}.$$

Also

$$\nabla'_i \Phi = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \nabla_j \Phi.$$

∇ ist also kovarianter Vektor(operator).

Beachte, daß in letzter Glg Index i an ∇ unten:
in Übereinstimmung mit Def.glg kovarianter Vektor.
Allgemein

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Merkregel: 1/oben = unten.
Def: *kovarianter Tensor* 2. Stufe ist
(1) Quadratschema T_{ij}
(2) mit Trafoverhalten

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}.$$

Wichtig:
Skalarprodukt nur von ko- mit kontravariantem Vektor definiert.

$$A^2 \equiv \sum_i A_i A^i.$$

Übung: zeige: A^2 ist Skalar, d.h. invariant unter Koord.trafo.
Einsteinsche Summationskonvention:
taucht Index oben und unten auf, dann summiere darüber

$$A^2 = A_i A^i.$$

Beachte: Index kann nur 1- oder 2-mal auftreten, nicht öfter.
Divergenz ist Skalarprodukt ko- mit kontravariant:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \partial_i A^i.$$

Gemischt ko- und kontravariante Tensoren: kanonische Def.
Addition von Tensoren gleicher ko- und kontra Stufe.

§41 Kroneckers Delta

Kroneckers Delta ist gemischt ko-kontravarianter Tensor Stufe 2.
Beweis: für Orthogonalkoord gilt

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta^i_j.$$

Schreibe Indizes des Kronecker Delta gleich positionsrichtig.
(Satz wird ja richtig sein...)
Sei $x'^i = x'^i(x^j)$, dann

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}.$$

Außerdem mit Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Also

$$\begin{aligned}
\delta^i_j &= \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \\
&= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \\
&= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^l} \\
&= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\delta^k_l.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Def kontravariant

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j,$$

Def kovariant

$$\nabla'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\nabla_j.$$

Obige Glg: 1. Faktor kontravariant bzgl ^{i}, 2. Faktor kovariant bzgl $_j$.
Damit dies exakt wie Tensorglg aussieht, schreibt man auch

$$\delta'^i_{\ j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\delta^k_l$$

und

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta'^i_{\ j}.$$

In jedem Koord.system besteht δ (bzw δ') aus 0 und 1.
Kronecker δ ist Einheitstensor.
Einzig anderer Tensor mit gleichen Komponenten in allen Koord:
Total schiefsymmetrischer Tensor (0, 1, -1).

§42 Kovarianz von Glgen

Einsteins Leitsatz:
alle physikalischen Glgen müssen Tensorglgen sein:
Nur diese lauten in allen Koord.systemen gleich.
Damit völlige Gleichheit aller Beobachter: ruhend, fahrend, fallend.

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

wird zu

$$S'_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$$

ohne additive Terme usw.
Dies nennt man (Begriffsverdopplung) Kovarianz einer Glg.
Beweis für Kovarianz von Tensorglg. Sei

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

Dann

$$S'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} S^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} = T'^{\mu\nu}.$$

Def Verjüngung eines Tensors

$$T^{\alpha\beta\gamma\ldots}_{\mu\nu\beta\ldots}$$

Def Kontraktion zweier Tensoren

$$S^{\alpha\beta\gamma\ldots}_{\mu\nu\rho\ldots} T^{\delta\epsilon\sigma\ldots}_{\tau\pi\beta\ldots}$$

Übung: zeige Kovarianz von

$$S^{\mu\nu}_{\nu\sigma} = T^{\mu}_{\sigma}.$$

§43 Der metrische Tensor