Theoretische Physik für das Lehramt III: Quantenmechanik und Statistische Physik (WS 05/06)

Blatt 01 – Ausgabe 18.10.05, Abgabe 25.10.05, Besprechung 27.10.05($20 + (4 + \pi)$ Punkte)[1]

▷ **Aufgabe 1 (Photonenrückstoß)** (4 Punkte)

Ein Natriumatom der Masse 3.82×10^{-26}kg emittiert ein Photon der Wellenlänge 5.89×10^{-7}m.

(a) Was sind die Energie und der Impuls des Photons?

(a) Was ist die Rückstoßgeschwindigkeit des Atoms? [Otto Frisch hat diesen Rückstoß 1933 vermessen. Heutzutage spielt er eine wichtige Rolle bei der Kühlung von Atomen, bis hinunter zu Nano-Kelvin, um damit die Bose-Einstein Kondensaten zu ermöglichen.]

(b) Welche DeBroglie Wellenlänge hat das Atom wenn es sich mit der Rückstoßgeschwindigkeit bewegt?

▷ **Aufgabe 2 (Korrespondenzprinzip)** (5 Punkte)

Wir betrachten ein Wasserstoffatom (ohne Spin), hier insbesondere klassische Kreisbahnen bei hohen Energien. Zeigen Sie:

> Für die hoch angeregten Niveaus, die sog *Rydbergzustände*, ist die Bohr'sche Übergangsfrequenz $\omega_{n\to(n-1)}$ näherungsweise gleich der klassischen Umlauffrequenz.

Hinweis: Dieser Sachverhalt gerinnt im *Bohr'schen Korrespondenzprinzip* zur Faustregel: Im Limes großer Quantenzahlen geht die Quantenmechanik in die klassische Mechanik über. Äquivalent: Ist die typische Wirkung in einem Prozess groß verglichen mit $\hbar$, kann man getrost klassisch rechnen. Um die Aufgabe anzugehen erinnern Sie sich doch einfach an die Schulphysik: auf Kreisbahnen ist Coulombkraft gleich Zentrifugalkraft; damit potentielle Coulombenergie gleich $-m\vec{v}^2$ (womit – wenn nur v bekannt wäre – auch der Radius bekannt wäre); damit Energie gleich Minus kinetische Energie (womit – bei gegebenem E – Geschwindigkeit bekannt, und also auch Radius, und ergo Umlauffrequenz).

▷ **Aufgabe 3 (Interferenz)** (5 Punkte)

Im folgenden sei

$$G_s(x;b) = \frac{1}{[2\pi b^2]^{1/4}} e^{-x^2/4b^2 + isx} \,. \tag{1}$$

mit b, s reelle Parameter, und x "Messwert einer Ortsmessung".

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(a) Die Funktion $\psi_{a,s}(x) = G_s(x-a;b)$ sei eine Wellenfunktion. Was ist die Orts-Wahrscheinlichkeitsdichte? Was ist die Impuls-Wahrscheinlichkeitsdichte? Welche Bedeutung haben die Parameter a, b, s? (1P)

(b) Betrachten Sie nun die lineare Überlagerung

$$\psi(x) = \alpha\psi_{a,s}(x) + \beta\psi_{-a,-s}(x)\,. \tag{2}$$

Welcher Gleichung müssen die komplexen Koeffizienten α, β genügen damit $\psi(x)$ eine Wellenfunktion ist? (1P)

(c) Wie lauten die Wahrscheinlichkeitsdichten einer Ortsmessung (Impulsmessung) im Zustand (2)? Diskutieren Sie insbesondere die Grenzfälle $a \gg b$ und $b \gg a$. Machen Sie sich jeweils ein Bild der Wahrscheinlichkeitsdichten. (2P)

(d) Identifizieren Sie in den Wahrscheinlichkeitsdichten die Terme, die von der Phase von α, β abhängen. Welche Bedeutung haben diese Terme? Welche Bedeutung haben die Terme, die *nicht* von den Phasen abhängen? (2P)

▷ **Aufgabe 4 (Dichtefluktuationen im klassischen idealen Gas)** (6 Punkte)

Gegeben sei ein klassisches ideales Gas bestehend aus N Atomen im Volumen V.

(a) Mit welcher W'keit wird man n Atome in einem Teilvolumen $v \subset V$ finden?

(b) Für welchen Wert von n ist diese W'keit maximal?

(c) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle n\rangle$ und die Varianz $\sqrt{\langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle}$. Wie verhalten sich Mittelwert und Varianz im Thermodynamischen Limes $N, V \to \infty$ bei $\rho := N/V = const.$?

Hinweis: Wer diese Aufgabe löst hat etwas fürs Leben. Die Aufgabenstellung läst sich leicht abbilden auf die eindimensionale Zufallsbewegung, das Kodierungstheorem von Shannon und vieles mehr. Zur Erinnerung: Bei einem Gas bestehend aus genau einem Atom lautet die W'keit, dieses eine Atom im Teilvolumne v zu finden $p = v/V$. Entsprechend ist $q := 1-p$ die W'keit, das Atom dort nicht zu finden. Ein ideales Gas ist nun ein Gas bei dem die Atome "voneinander nichts wissen". Jedes einzelne Atom wird also mit W'keit p im Teilvolumen v anzutreffen sein, und mit W'keit $1-p$ dort nicht anzutreffen sein. Hat man ein klassisches Gas aus zwei Atomen, findet man mit W'keit p^2 beide Atome in v, mit W'keit $2p(1-p)$ genau ein Atom in v, und mit W'keit $(1-p)^2$ kein einziges Atom in v. Wer hier verstaden hat, wo im zweiten Ausdruck die 2 herkommt, hat die Aufgabe schon fast gelöst ....

▷ **Aufgabe 5 (Ein unmoralisches Angebot)** ($4 + \pi$ Punkte)

Aus dem Internet erreicht Sie ein Angebot für ein gezinktes Glücksrad, spezifiziert durch eine W'keitsdichte

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{4}\left[\sin(\varphi/2) - \frac{1}{2}\sin\varphi\right], \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,. \tag{3}$$

zum Schnäppchenpreis von 99 Euro. Sie sind von der Aussicht, Ihre Bekannten beim Glücksspiel übers Ohr zu hauen fasziniert, wollen aber sicher stellen, dass sich Ihre Investition auch lohnt.

(a) Handelt es sich bei (3) tatsächlich um eine W'keitsdichte (positiv, normiert)? Vielleicht machen Sie sich ein Bild von $\rho(\varphi)$? (2 Punkte)

(b) Das Glücksrad kommt mit 64 Teilungsnägeln, alle im gleichen Abstand, einer bei $\varphi = 0$. Die entsprechenden Abschnitte sind durchnummeriert von 1 bis 64. Gespielt wird, indem man eine Zahl tippt, etwa "15". Bleibt das Rad auf 15 stehen, hat man gewonnen, andernfalls hat man verloren. Im Falle eines Gewinns erhält man bei einem Einsatz von 1 Euro eine Auszahlung von 63 Euro (von der Bank). Auf welche Zahl werden Sie setzen? (2 Punkte)

(c) Sehen Sie eine Chance, dass sich ihre Investition jemals amortisieren wird? Wenn ja – nach wieviel Runden (im Mittel)? (π Punkte)