Theoretische Physik für das Lehramt III: Quantenmechanik und Statistische Physik (WS 05/06)

Blatt 02 – Ausgabe 25.10.05, Abgabe 08.11.05, Besprechung N.V ($20 + (\pi + e)$ Punkte)[1]

▷ Aufgabe 1 (Adjungierter Operator) (3 Punkte)

Sie erinnern sich – der zu einem Operator $\hat{A}$ adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger$ ist definiert $\langle \phi, \hat{A}^\dagger \chi \rangle := \langle \hat{A}\phi, \chi \rangle$. Zeigen Sie

$$\left(\alpha \hat{A} + \beta \hat{B}\right)^\dagger = \alpha^* \hat{A}^\dagger + \beta^* \hat{B}^\dagger \tag{1}$$

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \tag{2}$$

▷ Aufgabe 2 (Kommutatoren) (4 Punkte)

Sie erinnern sich – der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ ist definiert $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Fürderhin $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ sog *Heisenberg-Kommutator*. Zeigen Sie

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{q}\right] = \hat{p}/m \tag{3}$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[V(\hat{q}), \hat{p}\right] = -\frac{\partial V}{\partial \hat{q}}\,. \tag{4}$$

▷ Aufgabe 3 (Teilchen in der Kiste I) ($7 + \pi + e$ Punkte)

Ein Teilchen sei in einer Kiste der Kantenlänge L frei beweglich eingeschlossen.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus und Eigenfunktionen. Zeigen Sie, daß die Energie-Eigenwerte (Energieniveaus) durch die Gleichung

$$E_{klm} = \epsilon\left((l+1)^2 + (m+1)^2 + (n+1)^2\right)\,, \qquad l, m, n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{5}$$

mit $\epsilon = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ gegeben sind, und die dazugehörigen Energie-Eigenfunktionen

$$\varphi_{klm}(x, y, z) = \left[\frac{2}{L}\right]^{\frac{3}{2}} \sin(k_l x)\sin(k_m y)\sin(k_n z)\,, \qquad k_l = \frac{(l+1)\pi}{L} \text{ etc}\,, \tag{6}$$

wobei die Kiste mit der unteren Ecke links vorne im Koordinatenursprung plaziert. (3 Punkte)

(b) Welchen Druck übt das Teilchen im Grundzustand auf die Wände aus? (2 Punkt)
Zur Erinnerung: "Druck" ist "Kraft pro Fläche". "Kraft" ist "Energie pro Wegstrecke". Bestimmen Sie also zunächst die Änderung der Grundzustandsenergie bei infinitesimaler Verschiebung einer der Wände.

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(c) Wie groß dürfte $\hbar$ allenfalls sein, um beim Öffnen handelsüblicher Melonen nicht in Lebensgefahr zu geraten?[2] (π Punkte)

(d) Man bestimme die 22 niedrigsten Energieniveaus und ihre Entartung. (e Punkte)

(e) In (d) haben Sie festgestellt, dass (i) die Energie-Niveaus um so dichter beieinander liegen, je größer die Kiste ist, und (ii) je höher die Energie, desto mehr Niveaus befinden sich in ihrer Nachbarschaft. Man sagt, im Grenzfall $L \to \infty$ entstehe ein quasi-kontinuierliches Energiespektrum. Bestimmen Sie für diesen Fall die Zustandsdichte, d.h. die Zahl der Niveaus, deren Energie im Energie-Intervall dE um E liegt. (2 Punkte)

▷ **Aufgabe 4 (Teilchen in der Kiste II)** (6 Punkte)

Das Teilchen aus Aufgabe 2 sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer linearen Überlagerung von Grundzustand und einem ersten angeregten Zustand präpariert,

$$\psi(x, y, z; t = 0) = \alpha\varphi_{000}(x, y, z) + \beta\varphi_{100}(x, y, z)\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,. \tag{7}$$

(a) Welcher Bedingung müssen α, β genügen, damit $\psi(x, y, z; t = 0)$ normierte Wellenfunktion? (1 Punkt)

(b) Sei $\psi(x, y, z; t = 0)$ normiert, $\int d^3x |\psi(x, y, z; t = 0)|^2 = 1$. Welche Bedeutung haben die Koeffizienten α, β bzw. die Absolutquadrate $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$? (1 Punkt)
Hinweis: Denken Sie an eine Energiemessung . . .

(c) Wie entwickelt sich der Zustand des Teilchens in der Zeit, d.h. wie lautet seine Wellenfunktion $\psi(x, y, z; t)$ für $t \geq 0$? (2 Punkte)

(d) Wie entwickelt sich der Erwartungswert der i-ten kartesichen Koordinate $\langle \hat{q}_i \rangle_\psi$ in der Zeit? Machen Sie sich ein Bild davon! (2 Punkte)

[2]Als theoretische Physikerin dürfen Sie annehmen, dass handelsübliche Melonen würfelförmig sind.