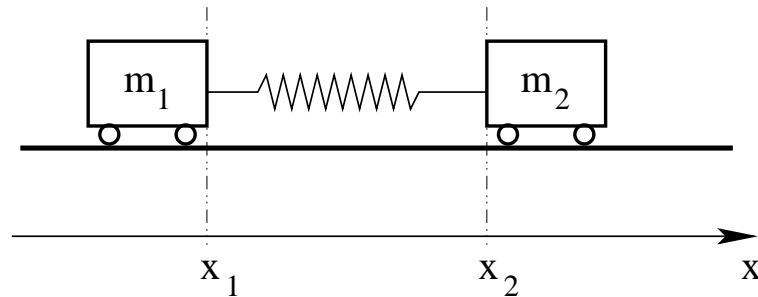


2-Körper-Problem

Gegeben seien zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 , die sich auf einer horizontalen Unterlage reibungsfrei in x -Richtung bewegen können. Die Körper sind mit einer Feder der Federkonstante k und Ruhlänge l_0 verbunden, und ihre Orte werden mit x_1 und x_2 bezeichnet:



- (a) Geben Sie die kinetische und die potentielle Energie, sowie die Lagrange-Funktion dieses Systems an.
- (b) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\ddot{x} = Ax + b,$$

mit dem Vektor

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und einer quadratischen Matrix A und einem konstanten Spaltenvektor b .

- (c) Finden Sie eine Matrix T , so dass

$$D := TAT^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: T ist nicht eindeutig; wählen sie T so, dass alle Einträge dimensionslos sind.

- (d) Drücken Sie die Lagrange-Funktion in den neuen Koordinaten $y := Tx$ aus, und bestimmen sie die zu den neuen Koordinaten kanonisch konjugierten Impulse.

Interpretieren Sie die neuen Koordinaten sowie die zugehörigen Impulse. Überzeugen Sie sich, dass die neuen Koordinaten und Impulse die kanonischen Poisson-Klammer-Relationen erfüllen.

- (e) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion in den neuen kanonischen Variablen, und daraus die Bewegungsgleichungen.
- (f) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und transformieren Sie die Lösungen zurück in die alten Koordinaten x_1 und x_2 .