Theoretische Physik für das Lehramt III: Quantenmechanik und Statistische Physik (WS 05/06)

Blatt 04 – Ausgabe 29.11.05, Abgabe 12.12.05, Besprechung N.V (20 + e^e Punkte)[1]

▷ Aufgabe 1 (HO verschoben) (10 Punkte)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator im konstanten Kraftfeld. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq \tag{1}$$

mit F eine reelle Konstante.

(a) Stellen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an. (3 Punkte)

(b) Quantisieren Sie das System. Stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen auf, und geben Sie die Lösung an. (4 Punkte)

(c) Was sind die Eigenwerte und dazugehrigen Eigenfunktionen des Hamiltonoperators (1)? (3 Punkte)

<u>Hinweis:</u> Es ist hilfreich beizeiten ein quadratische Ergänzung vorzunehmen, $\frac{m\omega^2}{2} q^2 - Fq = \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}$.

▷ Aufgabe 2 (Kohärente Zustände) (10 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Eigenvektoren von $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ kennengelernt, sog *Fockzustände* $|n\rangle$, wobei $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$. Fockzustände, daran darf ich Sie erinnern, sind die stationären Zustände des harmonischen Oszillators.

Bei den stationären Zuständen bewegt sich bekanntlich nichts. Nun hat man beim harmonischen Oszillator aber immer ein schwingendes Teilchen vor Augen. Um dieses Bild auch in der Quantenmechanik wieder zu finden, muss die zeitliche Entwicklung linearer Überlagerungen von Fockzuständen studiert werden. Und eine besonders wichtige Klasse von solchen linearen Überlagerungen sind die sog *kohärenten Zustände*,

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,, \tag{2}$$

worin $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie

(a) Ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist Eigenvektor des Vernichtungsoperators zum Eigenwert α, (1P)

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{3}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Im Folgenden verwenden wir geeignete Einheiten für Ort $\hat{q}$ und Impuls $\hat{p}$, so daß $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ mit $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Zeigen Sie:

(b) Erwartungswerte von Ort und Impuls im kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ lauten (1P)

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*)\,, \tag{4}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha)\,, \tag{5}$$

(c) $|\alpha\rangle$ ist Zustand minimaler Unschärfe, $\Delta_\alpha q \Delta_\alpha p = 1/2$. (1P)

(d) Die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) := \langle x|\alpha\rangle$ ist eine um $\langle q\rangle$ zentrierte Gaussfunktion der Breite $1/\sqrt{2}$ und Phasenfaktor $e^{i\langle\hat{p}\rangle x}$. (2P)

<u>Hinweis:</u> Besinnen Sie sich auf die Vorlesung und wie da die Ortsdarstellung des Grundzustands gewonnen wurde.

(e) Studieren Sie nun die Dynamik des kohärenten Zustands eines harmonischen Oszillators. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der harmonische Oszillator in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, daß der harmonische Oszillator dann auch zu irgendeinem späteren Zeitpunkt in einem kohärenten Zustand ist. Bestimmen Sie die Amplitude $\alpha(t)$. Machen Sie sich ein Bild von $\alpha(t)$ (komplexe Ebene benutzen!) und $|\langle x|\alpha(t)\rangle|$. Genießen Sie die augenfällige Übereinstimmung mit dem Bild vom schwingenden Teilchen. Machen Sie sich klar, dass die komplexe α-Ebene im engen Zusammenhang mit dem klassischen Phasenraum steht. (3P)

Im Kontext der Elektrodynamik/Quantenoptik heißen Ort und Impuls Quadraturamplituden; "Ort" entspricht dabei der elektrischen Feldstärke, "Impuls" ihrer zeitlichen Ableitung. Der Operator $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ heißt Photonenzahloperator. Zeigen Sie:

(f) Im kohärenten Zustand ist die Photonenzahl Poisson-verteilt (1P),

$$P(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!\,; \tag{6}$$

(g) Erwartungswert und Quadratvarianz der Photonenzahl im kohärenten Zustand sind (1P)

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 \tag{7}$$

$$\Delta_\alpha^2 n = |\alpha|^2 \tag{8}$$

▷ **Aufgabe 3 (Kronig-Penney Modell)** (e^e Punkte)

Ein Elektron in einem Metall "sieht" ein periodisches Potential. Obgleich seine Bewegung unbegrenzt ist, sind aufgrund der Periodizität des Potentials nur bestimmte Energiebänder erlaubt. Bestimmen Sie die elektronische Bandstruktur für das sog Kronig-Penney Modell,

$$V(x) = \alpha \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - ja) \tag{9}$$

<u>Hinweis:</u> Aus einem Lehrbuch Ihrer Wahl entnehmren Sie das Bloch'sche Theorem. Die Blochfunktion berechnen Sie zweckmässigerweise im Intervall $(0, a]$. Da steht dann nur eine Deltafunktion, und zwar am rechten Intervallende. Die verarzten Sie dann einfach über die Anschlussbedingungen im Delta-Potential,

$$\phi(a_+) = \phi(a_-) \tag{10}$$

$$\phi'(a_+) - \phi'(a_-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\phi(a) \tag{11}$$