Theoretische Physik für das Lehramt III: Quantenmechanik und Statistische Physik (WS 05/06)

Blatt 05a – Ausgabe 13.12.05, Abgabe 02.01.06, Besprechung N.V ($15 + \pi$ Punkte)[1]

▷ Aufgabe 1 (Ein nützlicher Satz) (3 Punkte)

Für die Belange der Quantenmechanik von hervorragender Bedeutung ist der

Satz: Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ selbstadjungiert mit Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ (sog *kompatible Observable*). Dann besitzen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ein gemeinsames System von Eigenvektoren.

den wir Sie bitten zu beweisen.

▷ Aufgabe 2 (Paulimatrizen und Spin-1/2) (12 Punkte)

Gegeben die sog *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Die durch

$$\hat{s}_a = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_a\,, \qquad a = x, y, z \tag{2}$$

definierten Operatoren genügen der Drehimpulsalgebra. (1 Punkt)
Bemerkung: Angesichts dieser Tatsache dürfen die drei Operatoren $\hat{\sigma}_a$, bzw. $\hat{s}_a$, als kartesische Komponenten eines Vektoroperators $\hat{\vec{\sigma}}$, bzw. $\hat{\vec{s}}$, aufgefasst werden, genannt *Paulispin*. Vektoroperator heisst in diesem Zusammenhang, dass sich seine Komponenten unter Drehungen des Koordinatensystems wie kartesische Komponenten des Koordinatenvektors transformieren.

(b) Die Länge des Spins sei durch $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ definiert. Wie lautet seine Matrixdarstellung? (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie: Für kartesische Komponenten $\hat{\sigma}_a$, $a = x, y, z$ gilt: (2P)

$$\hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b = i\hat{\sigma}_c\,, \qquad \hat{\sigma}_a\hat{\sigma}_b\hat{\sigma}_c = i\hat{1}\,, \qquad (abc = xyz \text{ zyklisch})\,. \tag{3}$$

(d) Es sei $\boldsymbol{a}$ ein kartesischer Einheitsvektor, und $\hat{\sigma}_a = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$ die kartesische Komponente des Paulispins in $\boldsymbol{a}$-Richtung. Zeigen Sie:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{1}\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\{\hat{\sigma}_a\} = 0\,, \qquad \mathrm{Det}\,\{\hat{\sigma}_a\} = -1\,, \tag{4}$$

wobei Tr die Spur (engl. *trace*), d.h. die Summe der Diagonalelemente, und Det die Determinante, d.h. das Produkt der Eigenwerte bezeichnet. (2 Punkte)

(e) Was sind die Eigenwerte von $\hat{\sigma}_a$, was sind seine Eigenvektoren? (2 Punkte)

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(f) Seien nun mit $|0\rangle$, $|1\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_z$ zu den Eigenwerten $\sigma = -1$, $\sigma = +1$, und $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ein Zustandsvektor. Welche Bedeutung haben die komplexen Koeffizienten α, β? (1 Punkt)

(g) Wir betrachten nun die Messung von $\hat{\sigma}_x$ im Zustand $|\psi\rangle$ wie in (f). Welche Messwerte duerfen mit welcher Wahrscheinlichkeit erwartet werden? (1 Punkt)

(h) Für den in (f) spezifizierten Zustand wird nun eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ gefolgt von einer Messung von $\hat{\sigma}_x$ analysiert. Was können Sie über die zu erwartenden Messresultate sagen? (2 Punkte)

▷ **Aufgabe 3 (Wohnst-Du-noch)** (π Punkte)

Bei einem Möbelhaus Ihrer Wahl kaufen Sie Spin-1/2 Teilchen. Beim Auspacken stellen Sie fest, dass man vergessen hat, den Zustand auf dem Beipackzettel anzugeben. Geben Sie ein Verfahren an, um den Zustand der erworbenen Teilchen zu charakterisieren. Zur Verfügung steht Ihnen ein Stern-Gerlach Magnet mit variabler Orientierung.