Theoretische Physik Lehramt III – Quantenmechanik und Statistik

HandOut W'keitstheorie
Ausgabe: 18.10.2005

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik können in der Quantenmechanik Ergebnisse von Messungen nur mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten (kurz: W'keiten) vorhergesagt werden. Man sagt, die Quantenmechanik ist eine *probabilistische* Theorie. Zeit also, den W'keitsbegriff kurz zu erläutern.

In der W'keitstheorie wird jedem System (Würfel, Glücksrad) eine Menge Ω zugeordnet, genannt *Elementarereignisraum*, oder *Stichprobenraum* (engl. sample space). Im einfachsten Fall ist Ω eine endliche Menge, beim Würfel etwa $\Omega = \{$⚀,⚁,⚂,⚃,⚄,⚅$\}$ – die Menge der möglichen oben liegenden Seiten nach einem Wurf.[1]

Die Präparation des System wird durch die Angabe eine Wahrscheinlichkeit $p(\omega)$ für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ charakterisiert. Ein fairer Würfel, beispielsweise, ist charakterisiert durch $p(\omega) = 1/6$ für alle $\omega \in \Omega$, aber es gibt bekanntlich auch gezinkte Würfel. Die einzige Einschränkung an die $p(\omega)$ sind (i) $p(\omega) \geq 0$, und (ii) $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.

Eine *Observable* wird beschrieben durch eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Quadrat-Zahl der Augen, beispielsweise, ist eine Observable, also $F($⚀$) = 1, F($⚁$) = 4$ usw. In der Sprache der W'keitstheorie heißen die F *Zufallsvariable*, zuweilen stochastische Variable. Der Wert $F(\omega)$ wird als derjenige Messwert interpretiert, den man abläse wenn das Elementarereignis ω einträte. Der Mittelwert ist definiert

$$\langle F \rangle = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) F(\omega)\,, \tag{1}$$

wobei die spitzen Klammern $\langle\cdot\rangle$ *Erwartungswert* genannt werden, zuweilen auch Mittelwert.

Ganz wichtig sind Zufallsvariable, hier genannt χ, die nur die Werte 1 oder 0 annehmen können. Solche binäre Zufallsvariable sind eindeutig charakterisiert durch die Angabe eine Teilmmenge $S \subset \Omega$ auf der sie den Wert 1 annehmen,

$$\chi_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in S \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Funktionen $\chi_S(\cdot)$ heißen *Indikator-Funktionen*. Eine Teilmenge $S \subset \Omega$ nennt man auch ein *Ereignis* (nicht *Elementar*ereignis), und die Menge aller Teilmengen von Ω, die sog. Potenzmenge von Ω, heisst in der W'keitstheorie *Ereignisraum* (nicht *Elementar*ereignisraum). Die Teilmenge $S = \{$⚁,⚃,⚅$\}$, beispielsweise, steht für das Ereignis "die Zahl der gewürfelten Augen ist gerade". Würfelt man beispielsweise eine ⚃, ist dieses Ereignis eingetreten. Bei einer ⚂ ist es nicht eingetreten.

Der Erwartungswert $\langle \chi_S \rangle$

$$P(S) := \langle \chi_S \rangle = \sum_{\omega} p(\omega)\chi_S(\omega) = \sum_{\omega\in S} p(\omega)\,. \tag{3}$$

[1] Auch wenn Sie versucht sind, die oben liegenden Seiten eines Würfels mit Zahlen zu identifizieren – tun Sie es nicht: Schliesslich kann man die oben liegenden Seiten eines Würfels nicht addieren, man denke an Farbenwürfel.

ist die W'keit für das Ereignis S. Für disjunkte Teilmengen $S_i \subset \Omega$ gilt offensichtlich $P(\cup_i S_i) = \sum_i P(S_i)$, also ist P ein Maß. Und da obendrein $P(\Omega) = 1$ ist P ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

Beim Glücksrad (ohne Teilungsnägel) ist die Sache schon schwieriger. Der Stichprobenraum darf hier mit dem Intervall $\Omega := [0, 2\pi]$ identifiziert werden: Elementarereignisse sind reellwertige Winkeln $\varphi \in \Omega$, und derer gibt es bekanntlich überabzählbar unendlich viele. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist nun sicher nicht schon durch die W'keiten $p(\varphi) = P(\{\varphi\})$ bestimmt: die W'keit, irgendeinen Winkel, beispielsweise $\varphi = \pi/e$, genau zu treffen, ist eben Null. Allerdings – und das ist der Grund für die Unterteilung mit Nägeln – ist die W'keit, in irgendeinem "endlichen" Intervall zu landen nicht Null. Ein faires Glücksrad, beispielsweise, ist definiert durch das W'keitsmaß $P(d\varphi) = d\varphi/(2\pi)$ wobei $d\varphi$ hier das Ereignis (offene Teilmenge) $(\varphi, \varphi + d\varphi) \subset \Omega$ bezeichnet. Offensichtlich $\int P(d\varphi) = 1$ – irgendwo auf dem Kreis wird man sicherlich landen.

Das faire Glücksrad vermittelt ein Beispiel für ein absolut stetiges Maß auf $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$. Allgemein sind solche Maße gegeben durch eine *(W'keits)Dichte* $\varrho : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $\varrho(\varphi) \geq 0$ und $\int d\varphi \varrho(\varphi) = 1$. Damit W'keitsmaß $P(d\varphi) = \varrho(\varphi)d\varphi$, und Erwartungswert einer Observablen $F : \Omega \to \mathbb{R}$ entsprechend $\langle F \rangle = \int d\varphi F(\varphi)\varrho(\varphi)$.

Wahrscheinlichkeiten erfahren eine natürliche Interpretation durch sog. *relative Häufigkeiten*. Würfelt man in einer Versuchsreihe N mal, und wertet ein bestimmtes Ereignis ω als "S-Treffer" falls $\omega \in S$, so ist die relative Häufigkeit die in der t-ten Versuchreihe aus den Messdaten (gewürfelten Augenzahlen) ermittelt wird

$$r(S; N, t) = \frac{[\text{Zahl der } S\text{-Treffer}]_t}{N} . \tag{4}$$

Das große Versprechen der Natur ist nun, daß im Grenzfall $N \to \infty$ die $r(S; N, t)$ mit Sicherheit einen von t unabhängigen (also objektiven) Wert $P(S)$ annehmen,

$$\lim_{N \to \infty} r(S; N, t) = P(S) . \tag{5}$$

Wir glauben der Natur, müssen aber darauf hinweisen daß diese Konstruktion philosophisch durchaus umstritten ist. "Mit Sicherheit" heisst genauer "mit an Sicherheit grenzender W'keit", und damit bewegt sich der Versuch, W'keiten über relative Häufigkeiten zu definieren im Kreis.

W'keitsaussagen sind grundsätzlich weder verifizierbar noch falsifizierbar. Das Versprechen "Dieser Würfel ist nicht gezinkt" behaupet unter anderem $p(5) = 1/6$. Haben Sie Pech (oder Glück?), und würfeln permanent eine 5, könnte man meinen, Sie hätten die behauptete Fairness des Würfels widerlegt. Haben Sie aber nicht. Schließlich haben Sie sicherlich nicht unendlich oft gewürfelt. Finden Sie andererseits bei einer langen Messreihe eine relative Häufigkeit $r = 1/6$ ist damit auch nichts bewiesen: schließlich könnte der Würfel trotzdem gezinkt sein.

Die Mathematik braucht sich um derartige Einwände nicht zu kümmern. "W'keitstheorie" ist aus ihrer Sicht angewandte Maßtheorie, die durch eine Liste spezieller Axiome, den sog. Kolmogoroffschen Axiomen, genauestens präzisiert wird. Für den Physiker bleibt bei der probabilistischen Quantenmechanik allerdings ein Rest Unbehagens, muss er sich doch aus dem Paradies unverrückbarer Gewissheiten verabschieden. Trotzdem – auch der mit Unbehagen geplagte Physiker tut gut daran, bei einer beoachteten relativen Häufigkeit $r = 1/6$ auf einen fairen Würfel zu setzen. Eine gegenteilige Wette könnte seine bürgerliche Existenz schnell ruinieren. Mit Sicherheit.