

Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie -
Übungsblatt 2 (20 Punkte)
Ausgabe 04.11.08 – Abgabe 10.11.08 – Besprechung 14.11.08

▷ **Aufgabe 1**

Alle an der Zusammensetzung eines Systems beteiligten Ruhemassen und Wechselwirkungsenergien tragen gleichermaßen zur trägen wie zur schweren Masse bei.

Schätzen Sie die Beiträge der gravitativen Selbstenergie und der elektrodynamischen Bindungsenergie zur Masse der Erde ab.

▷ **Aufgabe 2 (Synchronisation von Uhren)**

Die Synchronisation der Uhren eines Inertialsystems basiert auf einer empirischen Tatsache und einer Konvention:

Tatsache (“Konstanz der Lichtgeschwindigkeit”): Auf geschlossenen Wegen ist die mittlere Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante,

$$\frac{\text{Weglänge } L}{\text{Rundreisezeit } T} := c = \text{const.} \quad (5)$$

Definition (Kriterium “Gleichzeitigkeit”): Zwei Blitzereignisse heißen gleichzeitig wenn die Blitzfronten sich in der Mitte treffen.

- (a) Zeigen Sie, dass der so eingeführte Begriff der Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation ist (wenn P gleichzeitig Q und Q gleichzeitig P , dann P gleichzeitig R).
- (b) Geben Sie ein Verfahren an mit dem ein beliebiges Paar von Uhren eines Inertialsystems synchronisiert werden kann.

Bemerkung: Teil (a) klingt irgendwie trivial – ist es aber nicht. Zu zeigen ist: unter Voraussetzung dass sich einerseits die Blitzfronten von P und Q in der Mitte treffen, andererseits die Blitzfronten von Q und R , dann auch die Blitzfronten von P und R . Die Schwierigkeit des Beweises beruht darauf, dass man nicht den üblichen Geschwindigkeitsbegriff verwenden darf, sondern allein die “Tatsache” in der angegebenen Formulierung (die Bestimmung der Konstanten c erfordert nur ein Längenmessgerät und *eine* Uhr für die Rundreisezeitbestimmung). Der übliche Geschwindigkeitsbegriff ist zunächst nicht geeignet, da er entweder eine mitreisende Uhr voraussetzt, was bei Licht nicht geht, oder zwei Uhren – eine am Start, eine am Ziel – die bereits synchronisiert sind. Synchronisierung – also (b) – ist aber erst möglich, wenn sichergestellt dass Gleichzeitigkeit eine Äquivalenzrelation, also (a).

▷ **Aufgabe 3 (Ganggenauigkeit realer Uhren)**

Das Zeitnormal längs einer zeitartigen Weltlinie ist in der ART durch eine punktförmige Uhr definiert. Dummerweise sind reale Uhren nicht punktförmig, sondern ausgedehnt. Im Gravitationsfeld unterliegt der physikalische Mechanismus solcher physikalischer Uhren immer auch den Gezeitenkräften. Schätzen Sie den Einfluß der Gezeitenkräfte auf den Gang einer Atomuhr ab.

▷ **Aufgabe 4 (Hyperbolische Bewegung und Rindler Raum-Zeit)**

Gegeben eine Beobachter mit Namen Rindler, der sich bezüglich eines Inertialsystems beschleunigt bewegt, und zwar derartig, dass die Beschleunigung in seinem momentanen Ruhesystem eine konstante g . Herr Rindler führt eine gute Uhr mit sich, Anzeige τ , mit deren Hilfe er die Dauer von Prozessen längs seiner Weltlinie beurteilen kann.¹

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen Inertialkoordinaten t, x, y, z derartig gewählt werden, dass die Beschleunigung in positiver x -Richtung erfolgt.

- (a) Zeigen Sie, dass sich Rindlers Weltlinie in Koordinaten eines Inertialsystems darstellen läßt

$$t(\tau) = \frac{c}{g} \sinh(g\tau/c) + t_0, \quad (6)$$

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \cosh(g\tau/c) + x_0 - \frac{c^2}{g}, \quad (7)$$

worin τ Rindlers Eigenzeit, t_0 die Anzeige der Uhr im Inertialsystem wenn seine Uhr $\tau = 0$ anzeigt, und x_0 die seine Ortskoordinate im Inertialsystem zur Zeit t_0 .

Die Bewegung mit konstanter Beschleunigung heißt in der SRT auch “hyperbolische Bewegung”. Warum wohl?

- (b) Überzeugen Sie sich davon, dass Rindlers Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem gegeben ist

$$v(t) = \frac{(t - t_0)g}{\sqrt{1 + [(t - t_0)g/c]^2}} \quad (8)$$

und also nach hinreichend langer Zeit

$$|t - t_0| \gg c/g : \quad |v(t)| \approx c. \quad (9)$$

Für die Erdbeschleunigung $g = 9,81\text{m/sec}^2$ – was heißt hier “hinreichend lang” (i) im Inertialsystem, (ii) im Bezugssystem von Rindler?

¹Der gleichmäßig beschleunigte Beobachter ist ein nützliches Modell – denken Sie nur an Ihren Rakentrip zu den Sternen aus der Elektrodynamik-Vorlesung. Im Kontext der Gravitationsphysik: Sei die Erde beispielsweise eine massive Scheibe und also das Schwerfeld homogen. Mit beiden Beinen fest auf dem Boden drückt die Schwerkraft Sie mit konstanter Erdbeschleunigung g nach unten. Gemäß Äquivalenzprinzip haben Sie den Eindruck, Sie säßen in einer Rakete, die relativ zu einem Inertialsystem (frei fallendes Bezugssystem “abstürzender Fahrstuhl”) nach oben beschleunigt. Aus Sicht des abstürzenden Fahrstuhls sind Sie ein beschleunigter Beobachter.

- (c) Zeigen Sie, dass Rindlers Gleichzeitigkeitsschnitte in den Minkowskikoordinaten des Inertialsystems Geraden sind, die sich in einem Punkt O mit Koordinaten $t_0, x_0 - c^2/g$ schneiden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen Sie $t_0 = 0$ und $x_0 = c^2/g$. Der Punkt O hat dann Minkowskikoordinaten $(0, 0)$. Skizzieren Sie Rindlers Weltlinie nebst ausgesuchter Gleichzeitigkeitsschnitte (incl. Schnitte für $\tau = \pm\infty$) in der xt -Ebene der Minkowskikoordinaten des Inertialsystems.
- (d) Der in (c) ausgewiesene Punkt O definiert eine Singularität von Rindlers Raumzeit: für ihn währt das Ereignis O ewig. Überzeugen Sie sich davon, dass sich aus Rindlers Sicht die Singularität immer in räumlicher Entfernung c^2/g befindet. Welchen Wert hat diese Entfernung für die Erdbeschleunigung $g = 9,81\text{m/sec}^2$?
- (e) Rindlers Gleichzeitigkeitsschnitte partitionieren seine Raumzeit in vier Bereiche: Ereignisse unterhalb $\tau = +\infty$ können ihn beeinflussen, aber nur Ereignisse oberhalb $\tau = -\infty$ können von ihm beeinflusst werden. "Zwei-Weg Kommunikation" ist daher nur im Quadranten $\tau = \infty < t < \tau = -\infty$ möglich, während Ereignisse im komplementären Quadranten $\tau = +\infty < t < \tau = -\infty$ absolut unzugänglich sind, kurz "hinter dem Horizont". Mehr noch: zwei Ereignisse dieses Quadranten, die im Inertialsystem zeitartig nacheinander angeordnet sind, sind aus Rindlers Sicht zeitartig voreinander angeordnet: in diesem Quadranten ist aus seiner Sicht die Kausalbeziehung "invertiert" (Tod vor Geburt). Ereignisse im Quadranten $t < \tau = \pm\infty$ liegen aus Rindlers Sicht vor der Zeit – sie können nicht datiert werden. Ereignisse im Quadranten $t > \tau = \pm\infty$ liegen aus seiner Sicht nach der Zeit – auch sie können nicht datiert werden.
- (f) Rindler errichtet sein Bezugssystem \bar{x}, τ , bestehend aus räumlichen Markierungen, die in regelmäßigen Abständen links und rechts von ihm angebracht, und relativ zu ihm in Ruhe sind. Als Zeitstandard verwendet er seine Eigenzeit τ . Er selbst legt seine Ortskoordinaten fest $\bar{x} = 0$. Geben Sie den Kartenwechsel von Minkowskikoordinaten (x, t) zu den Erdlingskoordinaten (\bar{x}, τ) an. Wie drückt sich der Minkowskiabstand ds^2 in seinen Koordinaten aus?
- (g) Eine andere Geschichte: Zwei Raketen, in einem Inertialsystem zunächst ruhend nacheinander angeordnete, die durch eine unwägbare Schnur verbunden sind, starten zur gleichen Zeit mit gleicher Beschleunigung g ($= \text{const.}$ im jeweiligen Bezugssystem der Raketen). Nach einer Zeit T ist Brennschluss. Frage: ist nach Brennschluss die Schnur gerissen oder nicht? Noch 'ne Frage: was ist eigentlich der Unterschied zu (f)?