Theoretische Physik
- Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie -

Übungsblatt 3 (20 Punkte)

Ausgabe 21.11.08 – Abgabe 01.12.08 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Tensor-Rechenregeln)

"Tensor" ist ein zentraler Begriff der klassichen Feldtheorie. Für PhyiskerInnen sind Tensoren Zahlenschemata mit "wohl bestimmtem Transformationsverhalten" unter Basiswechsel. Das Zahlenschema v^α, beispielsweise, bezeichnet Komponenten eines n-Vektors genau dann wenn unter einem Basiswechsel $e_\alpha \to e_{\alpha'}$, worin $e_\alpha = e_{\alpha'} L^{\alpha'}{}_{\alpha}$, die "neuen" Komponenten $v^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\alpha} v^\alpha$.

(a) Gegeben ein Tensor vom Typ (p, q) (mit p oberen und q unteren Indices). Zeigen Sie dass die Verjngung ber ein schräg gestelltes Indexpaar ein Tensor vom Typ $(p-1, q-1)$.

(b) Gegeben ein $n \times n$ Schema $T^\alpha{}_\beta$ von dem lediglich bekannt ist, dass die Kontraktion mit einem beliebigen kontravarianten Vektor v^β wiederum einen kontravarianten Vektor liefert. Zeigen Sie, dass notwendig $T^\alpha{}_\beta$ Komponenten eines Tensors vom Typ $(1, 1)$ sind.

▷ Aufgabe 2 (Energie-Impulstensor)

Der Energie-Impuls Tensor ist für die ART von hervorragneder Bedeutung: in der Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen übernimmt er die Rolle der Massendichte der Newtonschen Gravitationstheorie.

Die genaue Form des Energie-Impulstensor, daran sei erinnert, hängt vom betrachteten Systems ab, und kann nicht aus der ART deduziert werden. Staub, beispielsweise, ist charakterisiert durch einen Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu} = \varrho_0 u^\mu u^\nu$, worin $\varrho_0(X)$ die Ruhemassendichte, also die Massendichte im lokalen Ruhensystem einer kleinen, zur Zeit $t = X^0/c$ am Ort (X^1, X^2, X^3) lokaliserten Staubportion, und $u(X)$ ihre 4er Geschwindigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass für relativistischen Staub die Annahme eines divergenzfreien Energie-Impulstensor, $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$, im nicht-relativistischen Grenzfall äquivalent der Kontinuitätsgleichung und der Eulergleichung mit verschwindender rechter Seite (kein Druckgradient, da Druck Null).

Bemerkung Partielle Ableitungen notieren wir zuweilen kurz und bündig $f_{,\mu} := \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

Staub ist Spezialfall einer größeren Klasse "ideale Flüssigkeit", wobei sich das Adjektiv "ideal" auf die Abwesenheit jeglicher Reibung etc. bezieht. Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit ist im lokalen Ruhesystem gegeben

$$T^{\mu\mu}|_{\mathrm{RS}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1}$$

worin $p = p(X)$ der Druck im lokalen Ruhesystem bei X, und $\varepsilon = \varepsilon(X)$ die dort vorhandene Energie-Massendichte (die neben der Ruhemasse der Teilchen auch deren kinetische und Wechselwirkungsenergie umfasst).

(b) Begünden Sie die Form der Energie-Impulstensors der idealen FLüssigkeit.

(c) Zeigen Sie, dass in einem beliebigen inertialen Laborsystem

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}\,, \tag{2}$$

worin $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ die Minkowskimetrik.

(d) Zeigen Sie, dass das Postulat $T^{\mu\nu}{}_{\mu} = 0$ im nicht-relativistischen Grenzfall äquivalent der Eulergleichung einer nicht-relativistischen idealen Füssigkeit.

▷ Aufgabe 3 (Maxwellscher Spannungstensor)

"Staub" und "ideale Flüssigkeit" sind zwei Modellsysteme deren Energie-Impulstensor sich durch einfache Symmetrieargumente hinschreiben lassen. "Plasmen" sind eine dritte wichtige Kategorie wo diese Verfahren allerdings versagt. Man muss bei diesem System zunächst auf die mikroskopischen Grundgleichungen zurückgreifen – und das sind die Maxwell-Gleichungen für die Dynamik der Felder, und die Newton-Lorentzschen Bewegungsgleichungen für die Dynamik der Materie, sprich Punktladungen.

Blättern Sie in Ihren Vorlesungsnotizen zur "Elektrodynamik". Zeigen Sie, dass der Energie-Impulstensor des gekoppelten Systems "Materie + Elektromagnetisches Feld" sich schreiben lässt $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\mathrm{emf}} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{mat}}$, worin $T^{\mu\nu}_{\mathrm{emf}}$ den Feldanteil, und $T^{\mu\nu}_{\mathrm{mat}}$ den Anteil der Materie beschreibt. Geben Sie die beiden Anteile explizit an, und verifizieren Sie die Divergenzfreihiet, $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$.