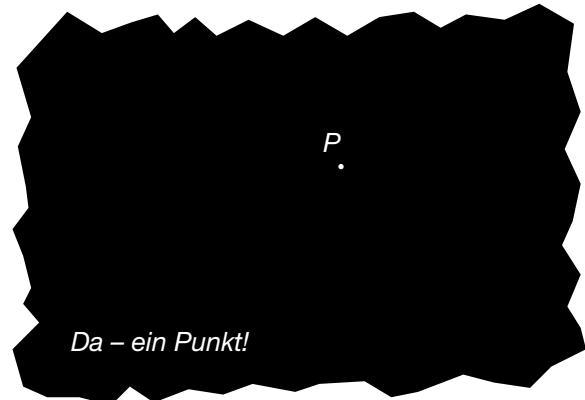


Div Grad Rot

Mathematische Bissen zu Kursvorlesung Theoretische Physik

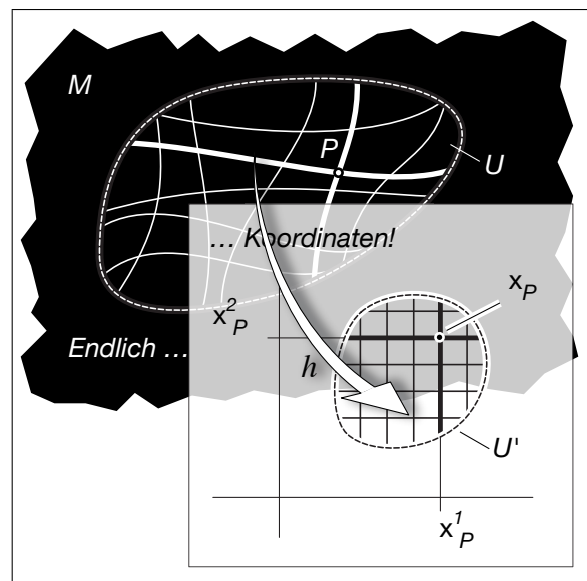


1 Koordinaten

Wenn im Folgenden vom physikalischen Raum die Rede ist, ist damit zunächst lediglich eine Punktmenge gemeint, bezeichnet M – die Menge aller möglichen Aufenthaltsorte eines Teilchens. Vorläufig ist diese Punktmenge ziemlich unstrukturiert. Macht nichts – Koordinaten, Kurven und Tangenten bedürfen keiner großartigen Struktur. Die kommt erst ins Spiel, wenn metrische Begriffe wie “Abstand”, “Winkel” etc eingeführt werden. Den Schlusspunkt bilden div grad rot, Gauss und Stokes. So ausgerüstet sollte man der theoretischen Elektrodynamik dann ganz gut folgen können -:)

Es ist guter Brauch, Punkte im physikalischen Raum anhand ihrer *Koordinaten* zu identifizieren. Allein – Koordinaten gibt es nicht. Oder sind Ihnen schon einmal welche in der freien Natur begegnet? Koordinaten sind vielmehr das Resultat einer Verabredung, genannt *Koordinatensystem*. Aus mathematischer Sicht ist so ein Koordinatensystem, auch genannt *Karte*, ein Tupel (U, h) worin h ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow U'$ einer offenen Menge $U \subseteq M$ – genannt *Kartengebiet* – auf eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, genannt *Koordinatengebiet*.¹

Wir haben das gleich mal für eine allgemeine sog *differenzierbare Mannigfaltigkeit* hingeschrieben. Darunter versteht man, dass sich die Punktmenge M vollständig mit Kartengebieten U, \bar{U} etc überdecken lässt, und zwar so, dass der



¹Homöomorphismus ist schick für “benachbarte Punkte von M werden auf benachbarte Punkte im \mathbb{R}^n abgebildet”. Warum hier alles offen sein sollte? Naja, irgendwann will man differenzieren, da braucht man offene Umgebungen. Ränder würden da eher stören ...

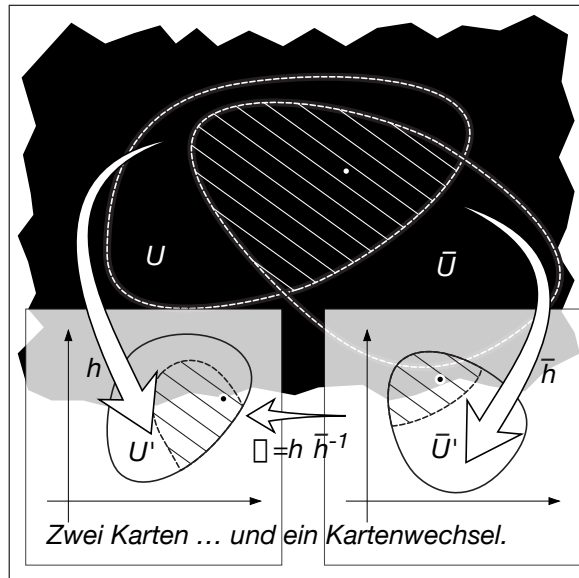
sog *Kartenwechsel* $\Phi := h \circ \bar{h}^{-1}$ auf den Überlappungsgebieten $\bar{h}(\bar{U} \cap U)$ ein C^∞ -*Diffeomorphismus*, also umkehrbar und (unendlich oft) differenzierbar.

Hat man einen Kartenwechsel $\Phi \equiv h \circ \bar{h}^{-1}$, wird der gerne notiert $\Phi := (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$, worin die Φ^i reellwertige Funktionen

$$\Phi^i : \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\bar{x} \mapsto x^i = \Phi^i(\bar{x}). \tag{2}$$

Lies: Ein Punkt $P \in M$, der in der Karte (\bar{U}, \bar{h}) durch das Zahlentupel $\bar{x}_P \equiv \bar{h}(P) = (\bar{x}_P^1, \dots, \bar{x}_P^n) \in \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ beschrieben wird, wird in der Karte (U, h) durch das Zahlentupel $x_P \equiv h(P) = (x_P^1, \dots, x_P^n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ beschrieben, wobei $x_P^i = \Phi^i(\bar{x}_P^1, \dots, \bar{x}_P^n)$. Mit x_P^i ist hier übrigens nicht "icks-peh-hoch-ihh" gemeint, sondern schlicht der Wert der i -Koordinaten des Punktes P in x -Koordinaten. Dass Indizes bei Koordinaten oben stehen (und auch bei Vektorkomponentne) ist so ein Notationstrick der Differentialgeometrie, Stichwort *Ricci-Kalkül*.



Ach ja – in der Notation der PhysikerInnen, der wir gerne folgen, identifiziert man die Karten (U, h) etc häufig mit dem Namen der Koordinaten, und spricht dann von x - bzw \bar{x} -Koordinaten. Auch lässt man den Hinweis, auf welchen Punkt P man sich hier bezieht meistens weg. Und schließlich schreibt man statt $x^i = \Phi^i(\bar{x})$ einfach $x^i = x^i(\bar{x})$ bzw ausführlich $x^i = x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. Wer in der Schule statt des korrekten $y = f(x)$ einfach $y = y(x)$ geschrieben hat, wird sich daran nicht stoßen.

2 Kurve

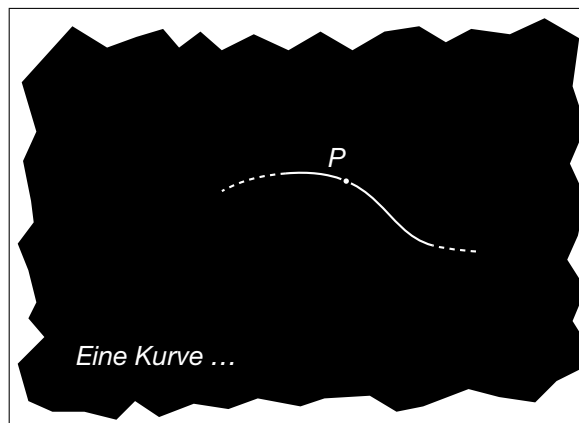
Neben den Punkten wird der Raum von Kurven bevölkert. Eine Kurve ist schlicht ein Tupel (I, K) , worin $I \subset \mathbb{R}$ reelles Intervall, und K eine irgendwie anständige Abbildung, sog *Parametrisierung*

$$K : I \rightarrow M \tag{3}$$

$$\tau \mapsto K(\tau) \tag{4}$$

mit τ sog *Kurvenparameter*.

Die Punktmenge $S_K := \{K(\tau) | \tau \in I\} \subset M$ heißt *Spur* der Kurve – in Anlehnung an eine Kreidespur auf der Tafel. Man beachte allerdings, dass eine parametrisierte Kurve nicht



bloß eine Punktmenge (eine Spur) ist. Zu einer Kurve gehört eben auch der durch die Abbildung K vermittelte “Zeitplan” des Durchlaufens der Spur.

Unter Verwendung einer Karte (U, h) wird (I, K) durch eine Kurve $(I, k := h \circ K)$ im Koordinatengebiet dargestellt,

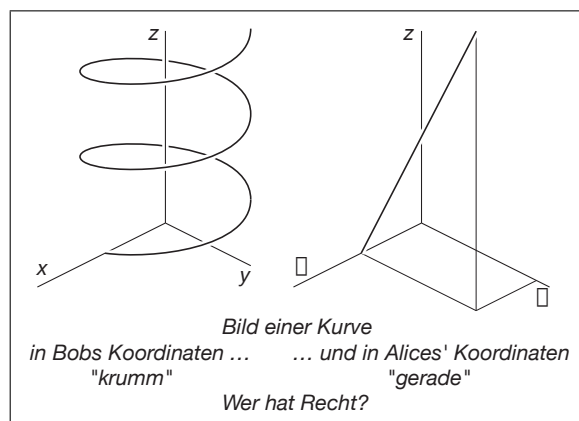
$$k : I \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n \quad (5)$$

$$\tau \mapsto k(\tau) := (k^1(\tau), \dots, k^n(\tau)) \quad (6)$$

worin die $k^i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, reellwertige Funktionen einer reellen Variable, für nicht-unterbrochene Kurven stetig, die sog *Koordinatenfunktionen* der Kurve (I, k) . PhysikerInnen schreiben hier nicht $k(\tau)$ sondern schlicht $x(\tau)$. Kann man machen, mach ich auch, nur darf man halt nicht ein “irgendwo” x mit einem “jetzt (zur Zeit τ) hier” x verwechseln.

Besonders angenehm sind sog *differenzierbare Kurven*, also Kurven deren Koordinatenfunktionen k^i differenzierbar sind, deren Ableitungen $\dot{k}^i := \frac{dk^i}{d\tau}$ für alle $\tau \in I$ definiert sind. Im Folgenden nehmen wir an, dass wir es immer mit – zumindest stückweise – stetig differenzierbaren Kurven zu tun haben.

In der Physik wird eine Kurve, wenn man sie denn konkret angeben muss, immer über ihre Koordinatenfunktionen in einer irgendwie gewählten Karte spezifiziert. Alice etwa, geht in die Welt, vermisst eine Kurve, gibt ihren Koordinaten Namen \bar{x} , und fasst ihr Messprotokoll zusammen $\bar{x}(\tau) = (1.0, \tau, \tau)$. Gezeichnet sieht die aus wie eine wunderschöne Gerade! Auch Bob geht in die Welt, vermisst die gleiche Kurve (aber mit anderen Instrumenten), gibt seinen Koordinaten den Namen x , und fasst zusammen $x(\tau) = (\cos(\tau), \sin(\tau), \tau)$. Er zeichnet seine Kurve und schaut auf eine wunderschöne



Helix! Klar, Alice und Bob haben die gleiche Kurve vermessen, und können daher ihre Koordinaten umrechnen. Aber wer hat denn nun Recht? Ist die fragliche Kurve in Wirklichkeit nun krumm, wie in Bobs Darstellung, oder gerade, wie in Alice Darstellung?

Ob “das Ding an sich” (Kant) hier gerade ist oder krumm lässt sich an dieser Stelle noch nicht entscheiden. Dazu bräuchte man ja einen absoluten Begriff von “krumm” oder “gerade”, einen Begriff der von der gewählten Darstellung unabhängig ist, der sich auf die Wirklichkeit bezieht, und den haben wir noch nicht. Solche und andere vertraute Begriffe wie “senkrecht”, “Winkel” oder “Abstand” bedürfen einer zusätzlichen Struktur, genannt Metrik. Die kommt auch gleich. Zunächst betreten wir aber noch den

3 Tangentialraum

Hat man eine Kurve (I, K) , die für $\tau = 0$ durch einen Punkt $P = K(\tau = 0)$ verlaufen möge, kann man sich für den Tangentialvektor der Kurve in diesem Punkt P interessieren,

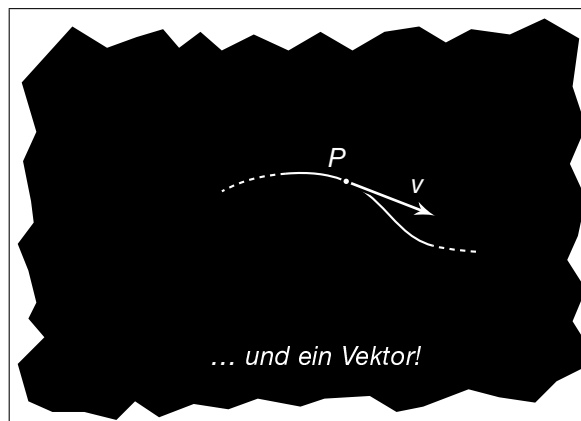
symbolisch notiert

$$\vec{v} := \left. \frac{dK}{d\tau} \right|_{\tau=0}. \quad (7)$$

Betrachtet man die Menge aller Kurven, die durch P führen, dann bilden die damit definierten Tangentialvektoren einen Vektorraum, genannt der *Tangentialraum* von M in P , notiert $\mathcal{T}_P M$. Die meisten Vektoren der Physik, das sei hier mal gesagt, sind Tangentialvektoren – also Vektoren eines Tangentialraums.²

Für eine gegebene Kurve K kann die Differentiation zunächst nicht, wie man es gewohnt ist, als Differenzenquotient eingeführt werden – schließlich ist K doch M -wertig (Punktwertig), und wie soll man denn die Differenz von Punkten bilden? Erst unter Zuhilfenahme einer Karte (U, h) und mit der Verabredung $k := h \circ K$ ist man wieder auf sicherem Boden, und man schreibt

$$\vec{v} = \vec{b}_i v^i, \quad v^i := \left. \frac{dk^i}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (8)$$



worin die v^i die Komponenten des Tangentialvektors *in der Karte* (U, h) , und die \vec{b}_i , $i = 1, \dots, n$ eine kartenspezifische(!) Basis von $\mathcal{T}_P M$, genannt die *x-Koordinatenbasis*.

Die Komponentent v^i eines Tangentialvektors \vec{v} sind – im Gegensatz zu ihm selbst – kein “Ding an sich”. Vielmehr hängen ihre numerischen Werte von der gewählten Karte ab. Bei einem Kartenwechsel Φ werden die Koordinatenfunktionen von K umgerechnet $k^i(\tau) = \Phi^i(\bar{k}^1(\tau), \dots, \bar{k}^n(\tau))$. Nach τ differenzieren, Kettenregel beachten, und abschließend $\tau = 0$ setzen liefert das Transformationsverhalten für die Komponenten eines Tangentialvektors

$$v^i = J^i_j \bar{v}^j, \quad (9)$$

mit reellen Koeffizienten

$$J^i_j = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial \bar{x}^j} \right|_{\bar{x}_P}. \quad (10)$$

Die J^i_j lassen sich in einem quadratischen Zahlenschema anordnen (Zeilenindex i , Spaltenindex j), und man schaut man auf eine Matrix, genannt die *Jacobimatrix* des Kartenwechsels Φ .

Da der Tangentialvektor verabredungsgemäß ein “Ding an sich”, also $\vec{b}_i v^i = \vec{\bar{b}}_i \bar{v}^i$, lesen wir hier das Transformationsverhalten der Basisvektoren ab,

$$\vec{\bar{b}}_j = \vec{b}_i J^i_j. \quad (11)$$

²Gemeinerweise (Glücklicherweise?) sind die Tangentialräume der Physik mengentheoretisch vom physikalischen Raum nicht zu unterscheiden (der \mathbb{R}^3 halt), und die Vektoren lassen sich wunderbar als “gerichteten Geradenstücke” der Euklidischen Geometrie visualisieren. Und Schwups-Bupps denkt jeder, jeder Vektor sei ein gerichtetes Geradenstück, ein Pfeil mit Schaft und Spitze, ein Zahlentupel, das entweder senkrecht steht, oder liegt – je nach dem, auf welche Schule man gegangen ist.

Man beachte die unterschiedliche Richtung der Transformation und Stellung der Summationsindizes. Ganz allgemein heißt ein Tupel (wie die v^i) *kontravariant*, wenn es sich wie die Komponenten eines Tangentialvektors transformiert, und *kovariant*, wenn es sich wie die Basis transformiert.

Gibt es noch andere Größen, die sich irgendwie “variant” transformieren? Aber Ja! Koordinatendifferentiale, etwa, transformieren kontravariant (Kettenregel! die x^i sind doch nur reelle Funktionen $x^i = \Phi^i(\bar{x})$ – schon vergessen ?)

$$dx^i = J^i_j d\bar{x}^j \quad (12)$$

wohingegen partielle Ableitungen $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ kovariant transformieren,

$$\bar{\partial}_j = \partial_i J^i_j. \quad (13)$$

Das Subskript \bar{x}_P in (10) – eigentlich sollte es auch an den Differentialen stehen – soll uns daran erinnern, dass wir alles bei einem festen Punkt P betrachten. Die partiellen Ableitungen ∂_i auf der rechten Seite “wirken” also nicht auf die J^i_j , sondern warten auf eine Funktion, die sie ableiten können.

Differentiale und partielle Ableitungen kann man mit reellen Zahlen multiplizieren und addieren – das Resultat ist wiederum ein Differential bzw eine partielle Ableitung: Koordinatendifferentiale und partielle Ableitungen sind, aus algebraischer Sicht, lineare Dinger, und ein Kartenwechsel ist ein Basiswechsel. Offensichtlich transformieren partielle Ableitungen wie Basisvektoren, nämlich kovariant, Differentiale transformieren wie Basisformen, nämlich kontravariant. Die partiellen Ableitungen bevölkern den Tangentialraum $\mathcal{T}_P M$, die Differentiale bevölkern den Dualraum $\mathcal{T}_P^* M$.

Schockierend, oder? Aus den schön anschaulichen Pfeilen, Zahlentupeln, und (Spalten)vektoren wurden hier mal eben kurz partielle Ableitungen. Und aus dem leckeren Blätterteig der Kovektoren bzw ihren gemütlich liegenden Zahlentupeln werden hier Differentiale. Keine Sorge – Sie dürfen ruhig weiter Pfeile sehen (ich tu’s auch). Die Identifizierung von Tangentialvektoren mit partiellen Ableitungen ist ein netter Trick der Differentialgeometrie. In der Praxis kommt man auch ohne ihn aus.

4 Endlich – Metrik!

Gauss hat das Königreich Hannover vermessen und seine Einsichten zusammengefasst: der physikalische Raum ist – jedenfalls soweit wir es überblicken können – drei-dimensional, homogen (kein Punkt ist ausgezeichnet), isotrop (keine Richtung ist ausgezeichnet) und flach (Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad). Im Umgang mit Zirkel und Lineal, den Sie in der Schule geübt haben, sind sie zum gleich Schluss gekommen: der physikalische Raum ist ein drei-dimensionaler Euklidischer Raum – also ein affiner Raum über einem Euklidischen Vektorraum (=Vektorraum mit Skalarprodukt).

Von besonderer Bedeutung hier das Skalarprodukt auf V – mit seiner Hilfe lässt sich der Abstand zweier Punkte in M ohne Bezug auf Koordinaten ausdrücken. Der durch gegebene Punkte P, Q via $Q = \tau(P, \vec{v})$ eindeutig bestimmte Vektor \vec{v} wird, mit seinem Schaft bei P lokalisiert, zum Verbindungsvektor, bezeichnet \vec{PQ} . Der Abstand zweier Punkte P, Q ist

dann über die Länge des Verbindungsvektors erklärt

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\| \quad (14)$$

worin $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm auf V .

Kartesische Koordinaten (endlich!) werden nun konstruiert indem man auf M einen Punkt O als Ursprung auszeichnet, und auf V eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i, i = 1, \dots, n$ einführt,

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (15)$$

Die Koordinaten von P werden jetzt mit den Entwicklungskoeffizienten x_P^i des Verbindungsvektors \vec{OP} identifiziert,

$$\vec{OP} = \vec{e}_i x_P^i. \quad (16)$$

Analog wird der Verbindungsvektor zweier Punkte P, Q dargestellt

$$\vec{PQ} = \vec{e}_i (x_Q - x_P)^i. \quad (17)$$

Dessen Länge – nach (14) der Abstand der beiden Punkte P, Q – berechnet sich unter Berücksichtigung der Orthonormalitätsrelationen (15) zu

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_Q^i - x_P^i)^2}, \quad (18)$$

was Ihnen aus der Schulzeit als *Satz des Pythagoras* in Erinnerung geblieben ist.

Im Euklidischen Raum sind die kartesischen Koordinaten also dadurch ausgezeichnet, dass sich in ihnen der Abstand nach der Pythagoras-Formel (18) bestimmen lässt. Natürlich kann man die Punkte eines Euklidischen Raumes auch mit nicht-kartesischen Koordinaten beschreiben. Denken Sie nur an die Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten. Allerdings lässt sich der Abstand zweier Punkte in solchen Koordinaten sicherlich nicht in der Form (18) ausdrücken. Allenfalls lokal, also in einer infinitesimalen Umgebung von P , wird sich das Quadrat des Abstandes als quadratische Form in den kleinen Verrückungen ausdrücken lassen.

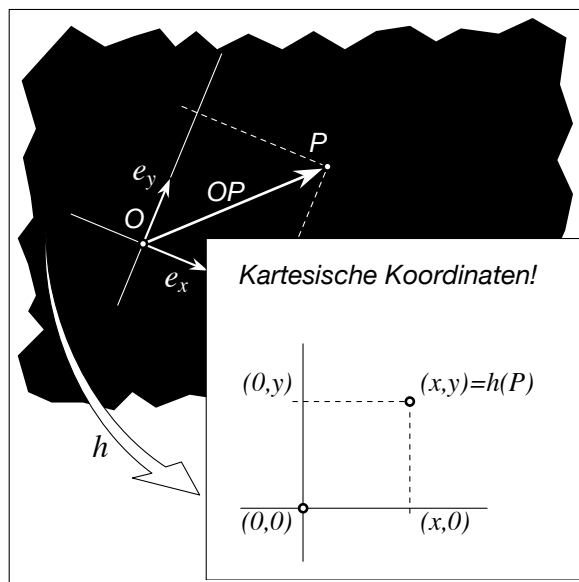
Seien also P, Q benachbarte Punkte, in irgendwelchen x -Koordinaten $x_Q = (x_P^1 + dx^1, \dots, x_P^n + dx^n)$, dann (Summenkonvention beachten!)

$$d(P, Q)^2 = g_{ij}(x_P) dx^i dx^j, \quad (19)$$

worin die $g_{ij}(x_P)$ gewisse Zahlen, sog *metrische Koeffizienten*. Im Euklidischen Raum, und mit einer kartesischen Karte, offensichtlich $g_{ij} = \delta_{ij}$ worin δ_{ij} das Kroneckerdelta.

Wohlgemerkt, die $g_{ij}(x_P)$ sind nicht “die Metrik”, sondern die Koeffizienten der Metrik in x -Koordinaten am Punkt P . Allerdings ist definitionsgemäß der Abstand zweier Punkte ein “Ding an sich”, also

$$g_{ij}(x_P) dx^i dx^j = \bar{g}_{ij}(\bar{x}_P) d\bar{x}^i d\bar{x}^j \quad (20)$$



worin \bar{g}_{ij} die metrischen Koeffizienten in \bar{x} -Koordinaten. Die Umrechnungsformel für die metrischen Koeffizienten findet man jetzt schnell aus der Umrechnungsformel von Koordinatendifferentialen, $dx^i = J^i_j d\bar{x}^j$

$$\bar{g}_{kl}(\bar{x}_P) = g_{ij}(x_P) J^i_k J^j_l \quad (21)$$

Die g_{ij} lassen sich in einem quadratischen Zahlenschema anordnen – und man schaut auf eine Matrix! Wer, wie ich, Freude an Matrizen hat liest das $\bar{g} = J^T g J$.

In kartesischen Koordinaten, wie gesagt, $g = \hat{1}$, die Einheitsmatrix. Und wenn Sie jetzt die Metrik in irgendwelchen krummen \bar{x} -Koordinaten brauchen, dann multiplizieren Sie halt die Jacobimatrix mit ihrer transponierten. Fertig ist die Laube. Wenn nur alles so einfach wäre ...

Der in (19) eingeführte lokale Abstandsbegriff lässt sich auf nicht-Euklidische “gekrümmte” Mannigfaltigkeiten übertragen. Ist für eine Mannigfaltigkeit eine Familie von Funktionen $g_{ij}(x)$ in irgendwelchen x -Koordinaten gegeben, vermittelt derer sich der Abstand zweier benachbarter Punkte gemäß (19) ausrechnen lässt, spricht man von einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit*. Um den formalen Bedingungen an eine Metrik zu genügen muss die Koeffizientenmatrix $(g_{ij}(x))$ für jedes x positiv definit sein (alle Eigenwerte größer Null). Wäre das nämlich nicht der Fall, gäbe es Punktepaare mit “negativem Abstand” – und was soll das denn sein?³ Sind Ihnen in irgendwelchen x -Koordinaten eine Familie von Funktionen $g_{ij}(x)$ gegeben, und gelingt es Ihnen eine Karte (\bar{U}, \bar{h}) zu finden, so dass unter dem Kartenwechsel zu \bar{x} -Koordinaten die Metrik Euklidisch wird, für alle \bar{x} also $\bar{g}_{ij}(\bar{x}) = \delta_{ij}$, ist Ihre Mannigfaltigkeit ein Euklidischer Raum. Andernfalls ist der Raum halt nicht-Euklidisch. Wie beispielsweise die Oberfläche einer Kugel.

Metrik ist ganz nützlich. Man kann mit ihrer Hilfe endlich mal die Länge einer Kurve bestimmen. Für eine parametrisierte Kurve K mit Spur S symbolisch

$$L(S) = \int d(K(\tau), K(\tau + d\tau)). \quad (22)$$

Sieht grauenhaft abstrakt aus, liest sich aber unter Zuhilfenahme einer Karte ganz einfach

$$L(S) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\tau)) \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau \quad (23)$$

In den Übungen zeigen Sie, dass hier die rechte Seite (1) unabhängig von der gewählten Karte, und (2) unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Also ein “Ding an sich” – wie links versprochen.

In (19) wird die Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M in Koordinaten dargestellt. Es geht aber auch anders, ganz ohne Bezug auf irgendwelche Koordinaten. Ausgangspunkt ist die koordinatenfreie Definition (14), die jetzt aber nur für benachbarte Punkte formuliert werden kann.⁴ Seien also P und Q benachbarte Punkte, die auf einer in M durch P und Q verlaufenden Kurve K liegen mögen. Dann

$$d(P, Q)^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|_P (d\tau)^2 \quad (24)$$

³Na ja – auf jeden Fall keine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Aber wie wärs denn mit einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit? Gute Idee: so kriegen wir auch den Minkowskiraum der speziellen Relativitätstheorie im Formalismus unter!

⁴Man sagt, Riemann’sche Mannigfaltigkeiten seien *lokal Euklidisch*

worin \vec{v} der Tangentialvektor an K in P , und $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{T}_P M$. Ausgewertet in einer Karte (U, h) , und unter Berücksichtigung $dx^i = v^i d\tau$ (bzw $v^i \equiv \dot{x}^i$), ergibt sich (19) mit metrischen Koeffizienten

$$g_{ij} = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle. \tag{25}$$

5 Krummlinig-orthogonale Koordinaten

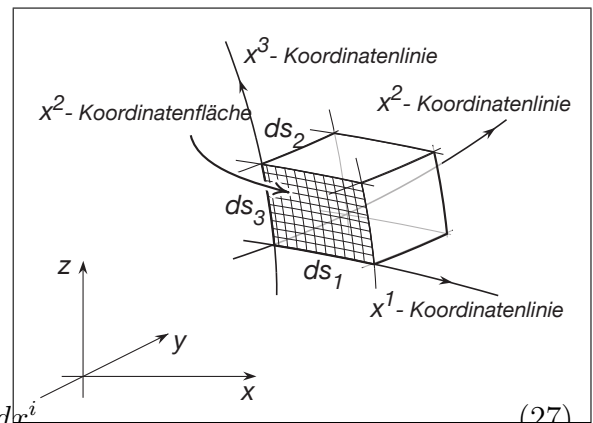
Koordinaten x heißen *krummlinig-orthogonal* wenn in ihnen die Metrik diagonal,

$$g_{ij}(x) = g_i^2(x)\delta_{ij}. \tag{26}$$

worin g_i , $i = 1, \dots, n$ gewisse koordinatenabhängig Funktionen, sog *Skalierung*. Die beliebigen Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten, beispielsweise, sind vom Typ krummlinig-orthogonal.

Verabredet man Inkremente (keine Summation!)

$$ds^i := g_i dx^i \tag{27}$$



ist der Abstand zweier benachbarter Punkte P, Q

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^n (ds^i)^2 = \delta_{ij} ds^i ds^j \tag{28}$$

was einen doch sehr an den Ausdruck für kartesische Koordinaten erinnert, nur dass halt hier statt der dx^i die ds^i stehen.

Die ds^i sind nützlich um kleine Längen, Flächeninhalte und Volumina anzugeben. Geht man in der Karte (U, h) entlang der i -ten Koordinatenlinie ein kleines Stück dx^i , ist die geometrische Länge des zurückgelegten Weges $ds^i = g_i dx^i$ (Keine Summation!). Das kleine Koordinaten-Rechteck $dx^i dx^j$, $i \neq j$, hat den geometrischen Flächeninhalt $da^{ij} = ds^i ds^j$, und der kleine Koordinaten-Quader $dx^1 \dots dx^n$ hat das geometrische Volumen $dV = ds^1 \dots ds^n$.

Die folgende Tabelle fasst das Gesagte für kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten zusammen:

(x^1, x^2, x^3)	g_1	g_2	g_3	dV
(x, y, z)	$g_x = 1$	$g_y = 1$	$g_z = 1$	$dx dy dz$
(ϱ, φ, z)	$g_\varrho = 1$	$g_\varphi = \varrho$	$g_z = 1$	$\varrho d\varrho d\varphi dz$
(r, ϑ, φ)	$g_r = 1$	$g_\vartheta = r$	$g_\varphi = r \sin \vartheta$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Das mit dem Volumen kennen Sie übrigens schon von den Koordinatentransformationen bei Gebietsintegralen. Da begegnet Ihnen die Jacobideterminante – die Sie vielleicht hier nicht sehen. Sie steht hier aber. Offensichtlich sind unsere Formeln verträglich mit der Aussage $dV = \sqrt{\det(g)} dx^1 \dots dx^n$, und weil doch $\det(g) = \det(J^T \delta J)$ folgt, mit $\delta = \hat{1}$ die Metrik in kartesischen Koordinaten, und unter Beachtung $\det(J^T) = \det(J)$, die bekannte Aussage $dx dy dz = |\det(J)| d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3$.

6 Beispiel: Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind ein gutes Beispiel, um das bisher Gesagte zu erläutern. Polarkoordinaten $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) := (\varrho, \varphi)$ sind über den Kartenwechsel auf kartesische Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ erklärt,

$$x = \varrho \cos \varphi = \Phi^x(\varrho, \varphi), \quad (30)$$

$$y = \varrho \sin \varphi = \Phi^y(\varrho, \varphi). \quad (31)$$

Die Jacobimatrix liest sich

$$\begin{pmatrix} J^x_\varrho & J^x_\varphi \\ J^y_\varrho & J^y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (32)$$

Matrixmultiplikation $J^T J$ liefert die Metrik in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_{\varrho\varrho} & \bar{g}_{\varrho\varphi} \\ \bar{g}_{\varphi\varrho} & \bar{g}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

woraus man die Skalenfaktoren abliest,

$$\bar{g}_\varrho = 1, \quad \bar{g}_\varphi = \varrho. \quad (34)$$

Koordinatenbasisvektoren, daran sei erinnert, sind Tangentialvektoren an Koordinatenlinien. In der kartesischen Karte werden die Tangentialvektoren an die x - bzw y -Koordinatenlinie bezeichnet \vec{e}_x bzw \vec{e}_y . Nach Voraussetzung (kartesische Koordinaten) bilden sie ein Orthornormalsystem,

$$\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0, \quad \langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle = 1, \quad (35)$$

dürfen daher mit Fug und Recht Koordinateneinheitsvektoren genannt werden (geadelt mit einem \vec{e}).

Tangentialvektoren an die ϱ - bzw φ -Koordinatenlinie bezeichnen wir \vec{b}_ϱ bzw \vec{b}_φ . Den Zusammenhang mit den Koordinatenbasisvektoren der kartesischen Karte liefert Gl. (11)

$$\vec{b}_\varrho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad (36)$$

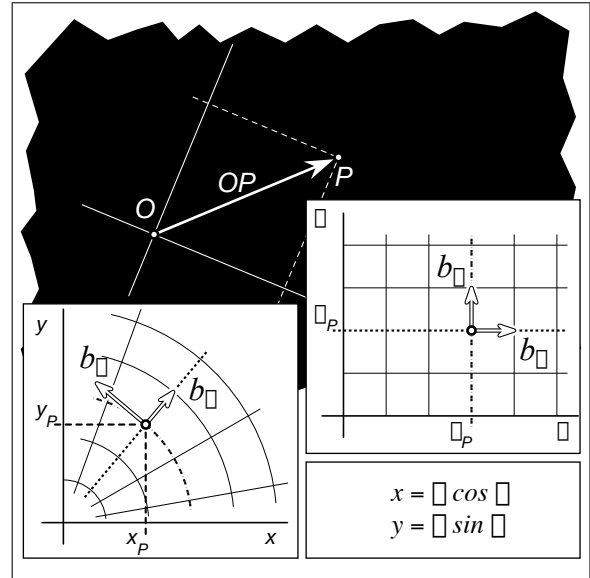
$$\vec{b}_\varphi = -\varrho \sin \varphi \vec{e}_x + \varrho \cos \varphi \vec{e}_y \quad (37)$$

Man beachte, dass die Linearkombination auf der rechten Seite explizit koordinatenabhängig. Umgangssprachlich: die $\vec{b}_{\varrho, \varphi}$ hängen – im Gegensatz zu den kartesischen $\vec{e}_{x, y}$ – vom Ort ab.

Die \vec{b} sind offensichtlich orthogonal, $\langle \vec{b}_\varrho, \vec{b}_\varphi \rangle = 0$, aber \vec{b}_φ ist – im Gegensatz zu \vec{b}_ϱ – nicht auf Eins normiert, $\langle \vec{b}_\varphi, \vec{b}_\varphi \rangle = \varrho^2$. Um Einheitsvektoren zu erhalten, muss man den halt normieren:

$$\vec{e}_\varrho \equiv \vec{b}_\varrho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \quad (38)$$

$$\vec{e}_\varphi \equiv \frac{1}{\varrho} \vec{b}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \quad (39)$$



Unnötig darauf hinzuweisen, dass die Linearkombination (und auch die Normierung!) koordinatenabhängig.

Ein Bild der polaren Einheitsvektoren macht man sich am besten in der kartesischen Karte. In dieser Karte bietet sich an, die kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_x, \vec{e}_y als kanonische Einheitsvektoren des \mathbb{R}^2 darzustellen,

$$\vec{e}_x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

und also

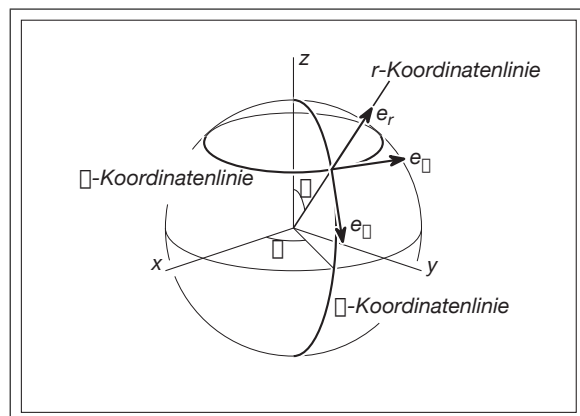
$$\vec{e}_\varrho \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (41)$$

Nett jetzt auch mal Spaltenvektoren zu sehen. Die hat man schon so vermisst ...

7 Div Grad Rot ...

Div Grad und Rot sind Differentialoperatoren der klassischen Vektoranalysis. Klassische Vektoranalysis ist Vektoranalysis im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Dank der Euklidischen Metrik können in diesem Raum die Skalarfelder (0-Formen) und die Dichten (3-Formen) identifiziert werden, und die 1-Formen und 2-Formen dürfen wie polare bzw axiale Vektorfelder behandelt werden.

Klassische Vektoranalysis hat eine gewisse Vorliebe für kartesische Koordinaten, und kennt auch wegen der Euklidischen Metrik keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Indizes. Die Vorliebe für die kartesischen Koordinaten teilen wir, werden aber doch hin und wieder auch krummlinig-orthogonale Koordinaten benutzen. Das mit den ko- und kontravarianten Indices geben wir aber gerne auf, und wir schreiben daher einen Vektor $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$, also die Komponenten mit Index unten.



8 In kartesischen Koordinaten ...

Wer noch kein Vektorfeld hat, macht sich erstmal eins. Gegeben ein skalares Feld ϕ , ein Potential etwa. Ein wichtiges Vektorfeld ist das sog *Gradientenfeld*. In kartesischen Koordinaten

$$\text{grad} \phi = \vec{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (42)$$

Ausgewertet an einem Punkt (x_P, y_P, z_P) ist $\text{grad} \phi$ ein Vektor (wird gleich gezeigt). Seine Richtung zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von ϕ , und das ist senkrecht auf der durch (x_P, y_P, z_P) verlaufenden Äquipotentialfläche.

Hat man ein Vektorfeld \vec{A} – nicht notwendigerweise ein Gradientenfeld – kann man daraus mit Hilfe der sog *Divergenz* ein skalares Feld bilden,

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (43)$$

und mit Hilfe der sog *Rotation* sogar ein anderes Vektorfeld,

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (44)$$

Die Divergenz bzw Rotation aus dem Bild eines Vektorfeldes abzulesen ist nicht ganz einfach. Als Faustregel kann gelten: immer wenn man den Eindruck hat, als “quellen” Vektorpfeilchen aus einem Raumgebiet ist irgendwo in diesem Raumgebiet die Divergenz verschieden von Null. Und immer wenn man den Eindruck hat einen Strudel zu sehen ist irgendwo die Rotation verschieden von Null.

Um nun zu beweisen, dass es sich hier tatsächlich um Felder des versprochenen Typs “skalar” bzw “Vektor” handelt, definieren wir Gradient, Divergenz und Rotation in einer Art und Weise, dass ihr Typ offen zu Tage tritt, und zeigen dann, dass sie sich in kartesischen Koordinaten in der Tat wie oben ausdrücken.

9 ... und ganz ohne Koordinaten

Zum ersten Schritt, den Definitionen. Im folgenden bezeichnet ΔV ein kleines bei P zentriertes Volumen mit Oberfläche $\partial(\Delta V)$, ΔF eine kleines bei P zentriertes Flächenstück mit Flächennormaleinheitsvektor \vec{m} und Randkurve $\partial(\Delta F)$, sowie Δs die Länge ein kleines Stückchen Weges der von P nach Q in Richtung \vec{n} verläuft.⁵ Gradient, Divergenz und Rotation werden jetzt vereinbart

$$\vec{n} \cdot \operatorname{grad}\phi := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi(P) - \phi(Q)) , \quad (45)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{a} , \quad (46)$$

$$\vec{m} \cdot \operatorname{rot}\vec{D} := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial(\Delta F)} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (47)$$

wobei $d\vec{a}$ Flächendifferential, und $d\vec{s}$ Kurvendifferential. Der Witz ist, dass hier rechts offensichtlich nur Skalare stehen, nämlich Integrale – das sind Summen! – von Skalarprodukten! Die Divergenz ist damit automatisch ein Skalar wie versprochen. Und weil \vec{n} und \vec{m} Vektoren eben auch Gradient und Rotation Vektoren! Weiterhin gilt, dass diese Definitionen “koordinatenfrei” formuliert sind (oder sehen Sie irgendwelche x, y, z ?). Das eröffnet eine (von mehreren) Möglichkeiten, div, grad und rot auch für andere Koordinatensysteme auszurechnen ...

... was wir gleich mal für den Gradienten in krummlinig-orthogonalen Koordinaten x_i tun. Wir wählen P und Q auf der x_1 -Koordinatenlinie, P mit Koordinaten $x^P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$, Q

⁵Wert Spaß an einheitlichen Formulierungen hat, darf das auch so formulieren: “...Weg mit Rand $\partial(\Delta s) = \{P, Q\}$.”

mit Koordinaten $x^Q = (x_1^P + \Delta x_1, x_2^P, x_3^P)$, und also $\vec{n} = \vec{e}_1$. Die Länge des Wegstückchens von P nach Q ist – im differentiellen Limes – $\Delta s \rightarrow ds = g_1 dx_1$, worin $g_1 = g_1(x^P)$ der Skalenfaktor in x_1 -Richtung an der Stelle x^P . Taylorentwicklung von $\phi(x^Q)$ um die Stelle x^P fördert – im differentiellen Limes – zu Tage $\vec{e}_1 \cdot \text{grad}\phi = \frac{1}{g_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}$. Mit den anderen Richtungen kann genauso verfahren werden, und also

$$\text{grad}\phi = \vec{e}_1 \frac{1}{g_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{1}{g_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{1}{g_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3}. \quad (48)$$

Für kartesische Koordinaten (x, y, z) sind die Skalenfaktoren alle gleich, $g_1 = g_2 = g_3 = 1$, und (48) stimmt mit (42) überein.

Nun die Divergenz, Gl. (46). Das Volumenintegral ergibt im differentiellen Limes $\Delta V \rightarrow dV = g_1 g_2 g_3 dx_1 dx_2 dx_3$, worin g_i die Skalenfaktoren am Punkt x^P . Das Flächenintegral im Zähler kann als Summe dreier Beiträge geschrieben werden, jeder Beitrag besteht aus einem Paar von Integralen über jeweils gegenüberliegende Seiten eines x_i -Koordinatenwürfels. Wir nehmen uns mal das Paar “links & rechts” ($L\&R$) der x^1 -Koordinatenflächen vor, also Flächennormaleneinheitsvektor rechts \vec{e}_1 , links $-\vec{e}_1$, und Flächendifferentialbetrag $da = g_2 g_3 dx_2 dx_3$. Fürderhin $A_1 := \vec{e}_1 \cdot \vec{A}$, die Komponente von \vec{A} in 1-Richtung. Im Integral sind die Funktionen A_1, g_2 und g_3 bei jeweils festen Werten der ersten Koordinate, links an der Stelle $x_1^P - \Delta x_1/2$, rechts an der Stelle $x_1^P + \Delta x_1/2$, zu betrachten. Verbleibende Integrations-Variable sind die zweiten und dritten Koordinate. Taylorentwicklung um x^P liefert

$$(A_1 g_2 g_3)(x_1^P \pm \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) dx_2 dx_3 = (A_1 g_2 g_3)_{x^P} dx_2 dx_3 \pm \frac{\partial(A_1 g_2 g_3)}{\partial x_1} \Big|_{x^P} \frac{\Delta x_1}{2} dx_2 dx_3 + \dots \quad (49)$$

Im differentiellen Limes, und Berücksichtigung dass der Normalenvektor links relativ zu rechts gespiegelt,

$$\int_{L\&R} \vec{A} \cdot \vec{a} = \frac{\partial A_1 g_2 g_3}{\partial x_1} \Big|_{x^P} dx_1 dx_2 dx_3 + \dots \quad (50)$$

Die Summe aller Beiträge, nach Division durch das differentielle Volumenelement, liefert

$$\text{div}\vec{D} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_3 g_1 g_2) \right]. \quad (51)$$

Für kartesische Koordinaten (x, y, z) mit $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ also wie oben, Gl. (43).

Schließlich die Rotation, Gl. (47). Wir legen ΔF in die x_1 - x_2 Ebene, also $\vec{m} = \vec{e}_3$. Das Flächenintegral im Nenner ergibt im differentiellen Limes $\Delta F \rightarrow dF = g_1 g_2 dx_1 dx_2$. Das Konturintegral im Zähler ist die Summe zweier Beiträge, wobei jeder Beitrag ein Paar von Integralen über gegenüberliegende Seiten des kleinen, in der x_1 - x_2 -Ebene, liegenden Rechtecks. Vorne (hinten) entlang der x^1 -Linie

$$(A_1 g_1)(x_1, x_2^P \mp \Delta x_2/2, x_3^P) dx_1 = (A_1 g_1)_{x^P} + \frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_1} \Big|_{x^P} (x_1 - x_1^P) dx_1 \mp \frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_2} \Big|_{x^P} \frac{\Delta x_2}{2} dx_1 + \dots \quad (52)$$

und da sich beim Integral über die hinteres Seite der Integrationsweg umdreht, der Beitrag $V\&H$

$$\int_{V\&H} \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{a} = - \frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_2} \Big|_{x^P} dx_1 dx_2 + \dots \quad (53)$$

Rechts (links) entlang der x^2 -Linie

$$(A_1 g_2)(x_1^P \pm \Delta x_1/2, x_2, x_3^P) dx_2 = (A_1 g_2)_{x^P} \pm \frac{\partial(A_1 g_2)}{\partial x_1} \Big|_{x^P} \frac{\Delta x_1}{2} dx_2 + \frac{\partial(A_1 g_2)}{\partial x_2} \Big|_{x^P} (x_2 - x_2^P) dx_2 + \dots \quad (54)$$

und also

$$\int_{L\&R} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} = \frac{\partial(A_1 g_2)}{\partial x_1} \Big|_{x^P} dx_1 dx_2. \quad (55)$$

Zwischenbilanz, nach Division durch die Differentielle Fläche

$$(\text{rot} \vec{A})_3 = \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(A_2 g_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_2} \right). \quad (56)$$

Das kann auf die verbleibenden Richtungen leicht übertragen werden, womit endgültig

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{e}_1 \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial(A_3 g_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2 g_2)}{\partial x_3} \right) \quad (57)$$

$$+ \vec{e}_2 \frac{1}{g_1 g_3} \left(\frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(A_3 g_3)}{\partial x_1} \right) \quad (58)$$

$$+ \vec{e}_3 \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(A_2 g_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(A_1 g_1)}{\partial x_2} \right). \quad (59)$$

Wie gehabt – für kartesische Koordinaten ergibt sich die bereits bekannte Formel (44).

10 Gauss und Stokes ...

Als durchaus gewolltes “Abfallprodukt” erhalten wir hier die Integralsätze von Gauss und Stokes. Multiplikation von (46), (47) mit den kleinen Volumina bzw Flächelchen (hier jetzt bezeichnet dV bzw dF) und anschließende Volumen bzw Flächenintegration liefert

$$\int_V \text{div} \vec{A} dV = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \quad \text{GAUSS'SCHER SATZ} \quad (60)$$

$$\int_\sigma \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial \sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \text{STOKES'SCHER SATZ} \quad (61)$$

Beweis, wie gesagt, eigentlich nicht nötig. Man muss sich nur klar machen, dass – wenn man zwei Würfel nebeneinander legt – alles was aus dem einen Würfel durch die gemeinsame Fläche austritt, beim anderen Würfel notwendig eintritt. Und legt man zwei Maschen nebeneinander, so heben sich die Wege auf der gemeinsamen Seite einfach auf ...

11 ... und Helmholtz' Eindeutigkeitssatz

Schliesslich der wichtige Eindeutigkeitssatz der Vektoranalysis: Ein Vektorfeld \vec{A} ist durch seine Quellen $\text{div} \vec{A}$ und Wirbel $\text{rot} \vec{A}$ bis auf ein harmonisches Gradientenfeld eindeutig bestimmt. Ein Gradientenfeld ist $\text{grad} \phi$ wobei ϕ skalars Feld; ein harmonisches Gradientenfeld ist ein Gradientenfeld für das zusätzlich $\text{div} \text{grad} \phi = 0$. Am schnellsten beweist man diesen Satz übrigens mittels Fouriertransformation. Wer die noch nicht kennt, muss halt im Buch nachschlagen.

12 Endlich – Nabla!

Mit der Einführung eines Differentialoperators “Nabla” lassen sich Gradient, Divergenz und Rotation auch kompakter schreiben,

$$\text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi, \quad (62)$$

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (63)$$

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (64)$$

Die folgenden Merksätze erleichtern den Umgang mit dem Nabla ganz erheblich

$$\text{rot grad} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0, \quad (65)$$

$$\text{“Gradientenfelder sind wirbelfrei”} \quad (66)$$

$$\text{div rot} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (67)$$

$$\text{“Wirbelfelder sind Quellfrei”} \quad (68)$$

Bezüglich des Kreuzprodukts verhält sich Nabla also fast wie ein gewöhnlicher Vektor – aber eben nur fast,

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \text{div grad} \quad (69)$$

wobei der letzte Term es verdient, einen eigenen Namen zu kriegen,

$$\text{div grad} := \Delta \quad \text{LAPLACE OPERATOR} \quad (70)$$

Der Laplace in Gl (69) wirkt übrigens komponentenweise; und so sieht er in kartesischen Koordinaten aus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (71)$$

Wie sich Δ in anderen Koordinaten ausdrückt, ist Thema der Übungen. Wer die nicht besuchen kann konsultiert die hinteren Umschlagseite im Jackson ...