Mathematische Methoden LA

- WS 2011/2012 -

Übungsblatt 3 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 01.11.2011 – Abgabe 07.11.2011 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist

- ☐ surjektiv, aber nicht injektiv
- ☐ injektiv, aber nicht surjektiv
- ☐ weder surjektiv noch injektiv

▷ Aufgabe 2

Bezüglich Addition und Multiplikation zweier Ungleichungen gelten folgende Sätze, die wir Sie bitten zu beweisen:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } a \leq b \text{ und } c \leq d, \quad &\text{dann} \quad a + c \leq b + d \\ \text{Wenn } 0 \leq a \leq b \text{ und } 0 \leq c \leq d, \quad &\text{dann} \quad a \cdot c \leq b \cdot d \end{aligned} \tag{1}$$

▷ Aufgabe 3

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$.

(a) Bilden Sie die Summe $z_1 + z_2$ und Differenz $z_1 - z_2$ arithmetisch und zeichnerisch mittels Zeigerdarstellung in der Gauss'schen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie die Absolutbeträge $|z_1|$, $|z_2|$.

(c) Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$, jeweils in der Form $u + iv$ mit u, v reell.

▷ Aufgabe 4

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, $z_2 = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$, worin α, β zwei reelle Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und zeigen Sie, dass $z_1 \cdot z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$.

<u>Hinweis:</u> Erinnern Sie sich beizeiten an die Additionstheoreme der Trigonometrie. Falls Sie diese vergessen haben, oder mit dem Begriff überhaupt nichts anfangen können, schauen Sie mal unter dem entsprechenden Stichwort in ein Lehrbuch, ein Schulbuch, oder eine Formelsammlung ...

▷ Aufgabe 5 (Dreiecksungleichung)

Man beweise und interpretiere in der Zeigerdarstellung, dass für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,, \tag{3}$$

sog. *Dreiecksungleichung.*

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...