Mathematische Methoden LA

- WS 2011/2012 -

Übungsblatt 8 (20 Punkte)

Ausgabe 05.12.2011 – Abgabe 12.12.2011 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Bestimmen Sie den Rang von A.

▷ Aufgabe 2

Gegeben ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten x, y, z

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 3\,, & (2)\\ 2x + 2y + 4z &= 1\,, & (3)\\ 3x + y + 2z &= 2\,. & (4) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus die Lösungsmenge des Systems.

▷ Aufgabe 3

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} mittels elementarer Matrixumformungen.

▷ Aufgabe 4

Gegeben eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

(a) Ist die Abbildung $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ orientierungserhaltend? Normerhaltend? Gar eine Drehung?

(b) Skizzieren Sie das Bild der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter R.

▷ **Aufgabe 5**

Sei V Vektorraum (etwa $V \simeq \mathbb{R}^3$), und $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ Abbildung von V auf V,

$$\mathcal{T}_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}\,, \tag{7}$$

mit $\vec{a} \in V$ fest.

(a) Die Abbildung läuft auch unter dem Begriff *Translation* (bzw. Verschiebung). Warum wohl?

(b) Ist $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ eine lineare Abbildung?

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{\mathcal{T}_{\vec{a}} | \vec{a} \in V\}$ versehen mit der Verknüpfung $\mathcal{T}_{\vec{a}} \circ \mathcal{T}_{\vec{b}} = \mathcal{T}_{\vec{a}+\vec{b}}$ bildet eine Gruppe, in Fachkreisen genannt *Translationsgruppe*. Ist die Gruppe abelsch? Was wäre das Neutralelement? Was wäre das zu $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ inverse Element?