Kapitel 5

Dirac Gleichung

5.1 Freie Diracgleichung

Wegen der zweifachen Zeitableitung erschien die Klein-Gordon Gleichung als Wellengleichung für die Quantenmechanik zunächst problematisch. Sucht man nun eine Wellengleichung mit nur einfacher Zeitableitung sollten im Sinne der Relativitätstheorie auch die räumlichen Ableitungen nur von erster Ordnung sein. Dirac's Ansatz[1] (wir schreiben $x = (\vec{x}, t)$)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x) = \underbrace{\left[c\sum_{j=1}^{3}\alpha^j\frac{\hbar}{i}\partial_j + mc^2\beta\right]}_{:=H_{\mathrm{D}}}\Psi(x)\,. \tag{5.1}$$

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London), **A 117**, 610 (1928); ibid. **A 118**, 351 (1928).

Die Konstanten α^i (und β) sind dabei sicherlich keine gewöhnlichen Zahlen – sonst wäre ja eine Richtung im Raum ausgezeichnet – sondern von anderer Natur, beispielsweise $N \times N$-Matrizen. Entsprechend wäre Ψ nicht einfach nur eine komplexwertige Funktion, sondern eine $N \times 1$ Matrix komplexwertiger Funktionen,

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_N(x) \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

Wie sich gleich herausstellt ist für massive Teilchen, also $m > 0$, mindestens $N = 4$.

Der Differentialoperator H_D auf der rechten Seite von Gl. (5.1) fungiert als Hamiltonoperator der Diracschen Wellenmechanik. Um eine W'keitsinterpretation (Normerhaltung) zu garantieren, sollte H_D selbstadjungiert sein, die Matrizen β, α^i entsprechend hermitesch,

$$\beta^\dagger = \beta\,, \qquad {\alpha^i}^\dagger = \alpha^i\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{5.3}$$

Um weiter Eigenschaften der Matrizen β, α^i festzulegen, erinnern wir uns an die Energie-Impulsbeziehung $E = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$, und identifizieren den Hamiltonoperator auf der rechten Seite von (5.1) mit einer Darstellung der Wurzel $\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$. Quadrieren dieser Gleichung liefert $c^2\vec{p}^2 + m^2c^4 = [c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2]^2$; Ausmultipliziern der rechten Seite, dabei beachten dass die Matrizen β, α^i nicht kommutieren, liefert nach Koeffizientenvergleich mit der linken Seite

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\,, \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{5.4}$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{5.5}$$

$$\beta^2 = 1\,. \tag{5.6}$$

Kurz – wir brauchen 4 antikommutierende, hermitsche Matrizen $\beta, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$. Wegen $(\alpha^i)^2 = (\beta)^2 = 1$ sind die Eigenwerte der gesuchten Matrizen ± 1. Aus $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$

folgt $\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta$. Spurbildung, und Berücksichtigung der zyklischen Invarianz unter der Spur, impliziert $\mathrm{Tr}\alpha^i = \mathrm{Tr}\beta = 0$, also Entartung der positiven Eigenwerte $+1$ gleich Entartung der negativen Eigenwerte -1, und also Dimension N =gerade. Für $N = 2$ gibt es aber nur 3 antikommutierende Matrizen (die Paulimatrizen); kleinstes mögliches N daher $N = 4$. In der sog **Standard-Darstellung**

$$\beta = \begin{bmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha^i = \begin{bmatrix} 0_2 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{5.7}$$

worin 1_2 die 2×2 Einheitsmatrix, 0_2 die 2×2 Nullmatrix, und σ^i die **Paulimatrizen**,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Andere Darstellungen erhält man via Ähnlichkeitstransformation $(\beta, \alpha^i) \to M(\beta, \alpha^i)M^{-1}$ mit nicht-singulärer 4×4-Matrix M.

Die drei α-Matrizen fasst man häufig zu einem Vektor $\vec{\alpha} := \alpha^1\vec{e}_x + \alpha^2\vec{e}_y + \alpha^3\vec{e}_z$ zusammen, und notiert die Summe in (5.1) als Skalarprodukt, $\sum_{i=1,2,3} \alpha^i\partial_i = \vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}$. Entsprechend wird die Diracgleichung notiert[2]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + mc^2\beta\right]\Psi\,. \tag{5.9}$$

wo $\Psi = \Psi(x)$ ein **Dirac-Spinor**, hier aufgefasst als 4×1-Matrix mit komplexwertigen Einträgen,

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

[2]Eine Rechtfertigung der Notation findet sich weiter unten wo gezeigt wird, dass sich die drei α-Matrizen unter räumlichen Drehungen in der Tat wie die Komponenten eines Euklidischen Vektors transformieren.

Jede der vier Komponenten des Diracspinors ist eine komplexwertige Funktion der Koordinaten und der Zeit. Entsprechend ist der Hilbertraum der Diracschen Wellenmechanik das Tensorprodukt $\mathcal{H}_{\text{Bahn}} \otimes \mathcal{H}_{\text{int}}$, wo $\mathcal{H}_{\text{Bahn}} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ der Hilbertraum der Bahnfreihietsgrade, und $\mathcal{H}_{\text{int}} \simeq \mathbb{C}^4$ der Hilbertraum der inneren Freiheitsgrade. Observable werden durch Lineare Operatoren $O : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dargestellt, Erwartungswerte sind definiert $\langle O \rangle_{\Psi(t)} = \int \Psi^\dagger(\vec{x}, t) O \Psi(\vec{x}, t) d^3x$.

Observable die sich ausschließlich auf die Bahnfreiheitsgrade beziehen sind der **Ort**, in Ortsdarstellung erklärt $(\vec{q}\Psi)(\vec{x}) = \vec{x}\Psi(\vec{x}, t)$, der **Impuls**, wie üblich erklärt $(\vec{p}\Psi)(\vec{x}) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})$, und Funktionen von Ort und Impuls, wie beispielsweise der **Bahndrehimpuls**, erklärt $(\vec{\ell}\Psi)(\vec{x}) = \vec{x} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})$.[3]

Observable, die sich ausschließlich auf die inneren Freiheitsgrade beziehen, sind selbstadjungierte Abbildungen $\mathcal{H}_{\text{int}} \to \mathcal{H}_{\text{int}}$, die angesichts $\mathcal{H}_{\text{int}} \simeq \mathbb{C}^4$ gerne als hermitsche 4×4-Matrizen dargestellt werden. Von diesem Typ sind beispielsweise die 4×4 Einheitsmatrix und die vier Diracmatrizen β, α^i, $i = 1, 2, 3$.

Aus der Dirac-Gleichung (5.9) und ihrer adjungierten Schwester $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^\dagger(x) = \frac{\hbar c}{i}\left(\vec{\nabla}\Psi^\dagger(x)\right) \cdot \vec{\alpha} - mc^2\Psi^\dagger\beta$ für den **hermitesch adjungierte** Spinor $\Psi^\dagger(x) = [\Psi_1^*(x), \ldots, \Psi_4^*(x)]$ lässt sich nun leicht eine **Kontinuitätsgleichung** ableiten,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0\,, \tag{5.11}$$

wo

$$\varrho(\vec{x}, t) = \Psi^\dagger(\vec{x}, t)\Psi(\vec{x}, t)\,, \qquad \vec{j}(\vec{x}, t) = c\Psi^\dagger(\vec{x}, t)\vec{\alpha}\Psi(\vec{x}, t)\,. \tag{5.12}$$

Da ϱ reell, nicht-negativ, wird ϱ als **W'keitsdichte** der Diracschen Wellenmechanik

[3] Die Dirac'sche Wellenmechanik wird traditionell in der Ortsdarstellung formuliert. Darstellungswechsel, wie sie in der Quantenmechanik gang und gäbe sind, spielen eine untergeordnete Rolle. Hüte auf den Operatoren können daher weggelassen werden.

interpretiert, und $\vec{j}$ entsprechend als **W'keitsstromdichte**.[4]

Der Ausdruck für die Stromdichte ist kompakt, aber wenig erhellend. Um hier Licht ins Dunkel zu bringen, empfiehlt es sich, die Stromdichte geeignet umzuformen. Vorbereitend multipliziert man die Diracgleichung mit der Matrix β, und stellt nach Ψ um, $\Psi = \frac{i\hbar}{mc^2}\beta\dot{\Psi} + \frac{i\hbar}{mc}\beta\alpha\cdot\vec{\nabla}\Psi$ (Gleichung $(*)$). Alsdann verkompliziert man die Stromdichte $\vec{j} = \frac{c}{2}\Psi^\dagger\alpha\Psi + \frac{c}{2}\Psi^\dagger\alpha\Psi$, ersetzt im ersten Term den Spinor Ψ durch die rechte Seite von $(*)$ und im zweiten Term den Spinor $\Psi^\dagger$ durch die rechte Seite der hermitesch adjungierte Version von $(*)$. Nach ein paar wenigen abschließenden Umstellungen schaut man auf die **Gordon-Zerlegung** der Dirac-Stromdichte,

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2m}\frac{\hbar}{i}\left[\Psi^\dagger\beta\left(\vec{\nabla}\Psi\right) - \left(\vec{\nabla}\Psi\right)^\dagger\beta\Psi\right]}_{\vec{j}_{\text{Bahn}}} + \underbrace{\frac{1}{2m}\vec{\nabla}\times\left[\Psi^\dagger\beta\vec{\Sigma}\Psi\right] - \frac{i\hbar}{2mc}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi^\dagger\beta\vec{\alpha}\Psi\right]}_{\vec{j}_{\text{int}}} \tag{5.13}$$

wo $\vec{\Sigma} = \Sigma^1\vec{e}_x + \Sigma^2\vec{e}_y + \Sigma^3\vec{e}_z$ mit

$$\Sigma^1 = -i\alpha^2\alpha^3\,, \qquad (123 \text{ zyklisch})\,. \tag{5.14}$$

In der Standarddarstellung (5.7)

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}\,. \tag{5.15}$$

Der mit $\vec{j}_{\text{Bahn}}$ bezeichnet Anteil in (5.13) ist die bereits aus der QM-I vertraute konvektive Stromdichte der mit der **Bahnbewegung** des Diracteilchens verknüpft ist.

[4] Es sei aber darauf hingewiesen, dass in einer quantenfeldtheoretischen Reformulierung der Dichteoperator $\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}$ zwar hermitesch, aber nicht definit, daher nicht als Teilchendichte sondern als Ladungsdichte interpretiert wird.

Der mit $\vec{j}_{\text{int}}$ bezeichnete Anteil in (5.13) ist mit den inneren Freiheitsgrade von Diracteilchen verknüpft. Im ersten Term begegnen einem Matrizen Σ^i, die offensichtlich eine Verallgemeinerung der Pauli'schen Spin-Matrizen darstellen. Der zweite Term ist relativistischer Natur – im Limes $c \to \infty$ tritt er nicht auf.

Der gesamte Drehimpuls eines nicht-relativistischen Spin-1/2 Teilchens, daran sei erinnert, setzt sich zusammen aus dem Drehimpuls der Bahnbewegung $\vec{\ell} = \vec{q} \times \vec{p}$ und dem Spin $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Entsprechend erweist sich

$$\vec{J} = \vec{\ell} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\,. \tag{5.16}$$

als **Gesamtdrehimpuls** des Diracteilchens, somit $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ relativistischer Spin-Operator, auch **Diracspin**. In den Übungen überzeugen Sie sich, dass für freie Diracteilchen $\vec{J}$ mit H_{D} kommutiert, $\left[H_{\text{D}}, \vec{J}\right] = 0$, womit Drehimpulserhaltung garantiert ist, $\frac{d}{dt}\vec{J} = 0$. Später wird $\vec{J}$ mit dem Erzeugenden räumlicher Drehungen im Hilbertraum der Dirac-Wellen $\Psi(\vec{x}, t)$ identifiziert.

5.2 Nichtrelativistischer Grenzfall, Pauligleichung

Die Wechselwirkung eines elektrisch geladenen Dirac-Teilchens mit dem elektromagnetischen Feld wird in minimaler Kopplung beschrieben $(E/c, \vec{p}) \to (E/c - e\Phi/c, \vec{p} - e\vec{A}) = (p^\mu - eA^\mu)$ bzw

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + mc^2\beta + e\Phi 1_4\right]\Psi\,. \tag{5.17}$$

In den Übungen überzeugen Sie sich, dass auch für (5.17) die Kontinuitätsgleichung (5.11) gilt mit Dichte und Stromdichte wie in (5.12) angegeben.

Notiert man den 4-komponentigen Dirac-Spinor (5.10) in Form eines **Bispinors**

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

worin ϕ, χ 2-komponentige Pauli-Spinoren,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

nimmt (5.17) die Form an

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left(e\Phi + mc^2\right)\phi + c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\chi \tag{5.20}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = \left(e\Phi - mc^2\right)\chi + c\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\phi \tag{5.21}$$

Im feldfreien Fall, $\Phi = 0$, $\vec{A} = 0$, und für ruhendes Teilchen, $\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\chi = 0$, lautet die Lösung

$$\phi(\vec{x},t) = \phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}, \quad \chi(\vec{x},t) = \chi_0 e^{+\frac{i}{\hbar}E_0 t}. \tag{5.22}$$

worin $E_0 = mc^2$ die Ruheenergie, und ϕ_0, χ_0 konstante Paulispinoren die die Spinpolarisation charakterisieren.

Im nicht-relativistischen Grenzfall erwartet man dass χ verglichen mit ϕ klein ist, die Komponenten ϕ und χ heißen daher die große bzw kleine Komponente.

Spaltet man die schnelle Oszillation ab,

$$\phi(\vec{x},t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\psi(\vec{x},t), \qquad \chi(\vec{x},t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\tilde{\chi}(\vec{x},t) \tag{5.23}$$

und führt zur Abkürzung den *kinetischen Impuls* ein

$$\vec{\pi} := \vec{p} - e\vec{A}, \tag{5.24}$$

nimmt die Dirac-Gleichung (**??**) die Form an

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = e\Phi\psi + c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\tilde{\chi} \tag{5.25}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi = -2mc^2\tilde{\chi} + e\Phi\tilde{\chi} + c\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\psi\,. \tag{5.26}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall, also für $mc^2 \gg$ alle relevanten Energien, sind die Zeitskalen in (5.26) klar getrennt: ψ ist eine vornehmlich "langsame" Variable, χ ist eine vornehmlich "schnelle" Variable (mit Frequenz $-2mc^2/\hbar$). Uns interessiert die Bewegung der langsamen Variable ψ, und die wird durch den – hoffentlich kleinen – langsamen Anteil von $\tilde{\chi}$ getrieben. Setzt man $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_{\text{schnell}} + \tilde{\chi}_{\text{langsam}}$ in Gl. (5.26), berücksichtig $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\chi}_{\text{schnell}} \approx -2mc^2\chi_{\text{schnell}}$, findet man[5],

$$\tilde{\chi}(\vec{x},t) \approx \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2mc}\psi(\vec{x},t) \tag{5.27}$$

und die Gleichung für den Spinor ψ liest sich

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 + e\Phi\right]\psi\,. \tag{5.28}$$

Um mit dem Quadrat $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2$ fertig zu werden erinnert man sich an die Identität $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$, und also

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{\pi}^2 + i(\vec{\pi}\times\vec{\pi})\cdot\vec{\sigma}\,. \tag{5.29}$$

[5] Das skizzierte Verfahren läuft unter dem Begriff der *adiabatischen Elimination*. In den Übungen machen Sie sich mit diesem wichtigen Verfahren vertraut. Eliminert wird die schnelle Variable; die angegebene Näherung merkt man sich "das langsame ψ versklavt das schnelle $\tilde{\chi}$" – oder biblisch: Die Letzten werden die Ersten sein ...

Da $\vec{\pi}$ neben $\vec{A}(\vec{x},t)$ auch den Differentialoperator $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ enthält, ist

$$\vec{\pi} \times \vec{\pi} = \underbrace{\vec{p} \times \vec{p}}_{=0} - e \underbrace{\vec{p} \times \vec{A}}_{\frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\times\vec{p}} - e\vec{A} \times \vec{p} + e^2 \underbrace{\vec{A} \times \vec{A}}_{=0} \tag{5.30}$$

$$= ie\hbar\vec{B} \tag{5.31}$$

Infolgedessen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\Phi\right]\psi \tag{5.32}$$

sog. *Pauli-Gleichung*.

Die Pauli-Gleichung ist Ihnen aus der Vorlesung QM-I bekannt. Im homogenen Magnetfeld $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{x}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\vec{\ell} + 2\vec{s}\right)\cdot\vec{B}_0 + e\Phi + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2\right]\psi \tag{5.33}$$

worin $\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{p}$ (mit $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$) der kanonische Bahndrehimpuls, und $\vec{s} := \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ der innere Drehimpuls, auch gennant *Drall* bzw *Spin*. Wegen $\vec{s}^2 = \hbar^2 s(s+1)\hat{1}_2$ mit $s = \frac{1}{2}$ beschreibt die Pauli-Gleichung, und also auch die Dirac-Gleichung, Spin-1/2 Teilchen.

Abzulesen hier das magnetische Moment

$$\vec{\mu} \equiv \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}} = \frac{e}{2m}\left(\vec{\ell} + 2\vec{s}\right) . \tag{5.34}$$

Insbesondere der Spinanteil

$$\vec{\mu}_{\text{Spin}} = g\frac{e}{2m}\vec{s}, \tag{5.35}$$

worin g das sog *gyromagnetische Verhältnis*, auch **Landé-Faktor** des Elektronenspins, nach der Dirac-Theorie offensichtlich $g = 2$. Korrekturen des Standarmodells,

für die QED zur führenden Ordnung berechnet $g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2) \approx 2,002328\ldots + O(\alpha^2)$ von J. Schwinger (1949), liefert $g_{\text{theo}} = 2,0023193048(8)$, verglichen mit dem experimentellen Wert $g_{\text{exp}} = 2,00231930436182(52)$[6] fantastisch.

Dass sich im nichtrelativistischen Grenzfall aus der Dirac-Gleichung die Pauli-Gleichung ableiten lässt, und dass die Dirac-Gleichung insbesondere ein gyromagnetisches Verhältnis $g = 2$ in Übereitnstimmung mit den experimentellen Befunden impliziert, hat der Dirac-Gleichung in den Anfangstagen der relativistischen Quantenmechanik zum Durchbruch verholfen. Seitdem regiert sie die Physik der Elementarteilchen, insbesondere der Leptonen und der Quarks.

5.3 γ-Matrizen

In der Form (5.9) läßt sich die Dirac-Gleichung zwar gut mit der nichtrelativistischen Quantenmechanik vergleichen, erscheint für allgemeine Untersuchungen zur relativistischen Quantenmechanik aber eher ungeeignet. Man vermisst irgendwie die 4er Vektoren und Tensoren. Verabredet man aber sog γ-*Matrizen*

$$\gamma^0 := \beta\,, \qquad \gamma^i := \beta\alpha^i\,, \quad i = 1,2,3\,, \tag{5.36}$$

läßt sich die freie Dirac-Gleichung (5.9) schön 4er-mäßig schreiben[7]

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right]\Psi = 0\,. \tag{5.38}$$

[6] CODATA 2014

[7] Zuweilen notiert man auch

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\,\Psi = 0\,, \tag{5.37}$$

worin $\not{\partial}$ der sog. *Feynman-Dolch*, für allgemeine 4-er Vektoren $A = (A^\mu)$ erklärt $\not{A} := \gamma^\mu A_\mu = \gamma_\mu A^\mu$.

Die Rechtfertigung, den Index an den Gamma-Matrizen als 4er Index zu lesen, findet sich in dem Nachweis, dass sich die γ^μ unter Lorentztransformationen wie die kontravarianten Komponenten eines 4er Vektors transformieren. Was eigentlich schon klar ist, da der Compton-Impuls mc ein Lo'ska, und ∂_μ sich wie kovariante Komponenten transformieren ...

Hermitizität $\beta^\dagger = \beta$, $\alpha^\dagger = \alpha$, in Verbund mit $\{\beta, \alpha^i\} = 0$ impliziert

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \,, \qquad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \,. \tag{5.39}$$

also γ^0 hermitesch während γ^i antihermitesch.

Auch die übrige Algebra der γ-Matrizen (5.36) läßt sich leicht aus (5.4-5.6) ablesen,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\hat{1}_4 \,, \tag{5.40}$$

mit $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$ die Minkowskimetrik. In der Standardarstellung (5.7)

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \hat{1}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{1}_2 \end{bmatrix} , \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} , \quad i = 1,2,3 \,. \tag{5.41}$$

Die praktische Bedeutung der γ-Matrizen offenbart sich wenn die gute alte Kontinuitätsgleichung (5.11) in der γ-Sprache rekonstruiert wird. Führt man hier einen **konjugierten** Spinor ein

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \,, \tag{5.42}$$

und schreibt die Komponenten der Stromdichte (5.12) in der Form

$$j^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \,, \qquad \mu = 0,1,2,3 \,, \tag{5.43}$$

ergibt sich die Kontinuitätsgleichung (5.11) ganz zwanglos in der erhofften 4-er Form

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \,. \tag{5.44}$$

Die in (5.42) für Dirac-Spinoren eingeführte Konjugation ist für beliebige Dirac-Matrizen erklärt

$$\bar{A} := \gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \,. \tag{5.45}$$

Sie erfüllt die für eine Konjugation üblichen Regeln

$$\overline{aA} = a^* \bar{A} \,, \qquad \overline{AB} = \bar{B}\bar{A} \,, \quad \overline{\bar{A}} = A \,, \tag{5.46}$$

und vertauscht mit den anderen algebraischen Operationen,

$$\overline{A^\dagger} = \bar{A}^\dagger \,, \qquad \overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1} \,, \qquad \overline{A^*} = \bar{A}^* \,, \qquad \overline{A^T} = \bar{A}^T \,. \tag{5.47}$$

Für die konjugierten γ-Matrizen,

$$\bar{\gamma^\mu} = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \,. \tag{5.48}$$

findet man mit Gl. (5.39) und (5.40) schnell

$$\bar{\gamma^\mu} = \gamma^\mu \,. \tag{5.49}$$

Durchaus auch instruktiv die Rekonstruktion der minimal gekoppelten Dirac-Gleichung (5.17) in der γ-Sprache. Unter Verwendung der bereits bekannten **kovariante Ableitung** $D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu$ erscheint (5.17) in der Form

$$(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\,\Psi = 0 \,. \tag{5.50}$$

Sinnig auch, daraus Klein-Gordon Gleichungen zu erzeugen (man erinnert sich: jede Komponente der freien Dirac-Gleichung genügt einer Klein-Gordon Gleichung). Von links mit $(-i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)$ liefert nach Division durch $\hbar^2$

$$\left(\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu + (mc/\hbar)^2\right)\Psi = 0 \tag{5.51}$$

Zu beachten ist hier dass die D_μ nicht kommutieren; vielmehr

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = i\frac{e}{\hbar}F_{\mu\nu} \tag{5.52}$$

mit $(F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ der Faradaytensor. Infolgedessen

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu &= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right) D_\mu D_\nu && (5.53)\\
&= \left(g^{\mu\nu}\hat{1} - i\sigma^{\mu\nu}\right) D_\mu D_\nu && (5.54)\\
&= D_\mu D^\mu + \frac{1}{i}\sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu && (5.55)\\
&= D_\mu D^\mu + \frac{1}{2i}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu] && (5.56)\\
&= D_\mu D^\nu + \frac{e}{2\hbar}\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} && (5.57)
\end{aligned}$$

Daher: im elektromagnetischen Feld unterscheiden sich Klein-Gordon und Klein-Gordonisierte Dirac um Spin-F Kopplung (klaro: für Spinlose Klein-Gordon kann's das nicht geben ...).

5.4 Lösungen der freien Diracgleichung

Mit dem Separationsansatz $\Psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t}$ wird aus der Dirac-Gleichung (5.9) die **stationäre Diracgleichung**

$$\varepsilon\psi(\vec{x}) = \left[\frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + mc^2\beta\right]\psi(\vec{x})\,. \tag{5.58}$$

wo die Separationskonstante ε Eigenwert des Dirac-Hamiltonian H_{D}.

Da der Dirac-Hamiltonian aus (5.9) mit dem Impulsoperator $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ vertauscht – der Impuls ist eine Erhaltungsgröße – suchen wir Lösungen in Form ebener Wellen

$$\psi(\vec{x}) = \mathsf{w}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}}\,, \tag{5.59}$$

worin V das Quantisierungsvolumen, und w ein konstanter Diracspinor. Eingesetzt in (5.58) schauen wir auf das Eigenwertproblem einer 4×4-Matrix $H_D(\vec{p})$,

$$\varepsilon\mathsf{w} = \underbrace{\left[c\vec{p}\cdot\vec{\alpha} + mc^2\beta\right]}_{:=H_D(\vec{p})}\mathsf{w}\,. \tag{5.60}$$

das es nun zu lösen gilt.

Notiert man den konstanten Diracspinor w in Form eines Bispinors

$$\mathsf{w} = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

worin ϕ und χ zwei-komponentige Paulispinoren,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \tag{5.62}$$

liest sich das Eigenwertproblem (5.60)

$$mc^2\phi + c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi = \varepsilon\phi\,, \tag{5.63}$$

$$c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\phi - mc^2\chi = \varepsilon\chi\,. \tag{5.64}$$

Umstellen von (5.64) liefert $\chi = \frac{c\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{\varepsilon+mc^2}\phi$, dies in (5.63) eingesetzt, unter Berücksichtigung von $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$, zeitigt $\varepsilon^2 = m^2c^4 + c^2\vec{p}^2$ bzw.

$$\varepsilon = +E(\vec{p}) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = -E(\vec{p}) \quad \text{wo} \quad E(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}\,. \tag{5.65}$$

Das Spektrum von H_{D} zerfällt demnach in zwei Kontinua, eines oberhalb mc^2, das andere unterhalb $-mc^2$. Der Hamiltonoperator der Diracschen Wellenmechanik ist nicht definit, d. h. er ist weder von unten noch von oben beschränkt.[8] Die Interpretation der Lösungen zu negativer Energie verschieben wir auf später (vgl. Kapitel zu Diracs Löchertheorie).

Amplitudenspinoren w zu positiven Eigenwerten $\varepsilon = +E(\vec{p})$, notiert mit dem Buchstaben u, und Amplitudenspinoren zu negativer Eigenwerten $\varepsilon = -E(\vec{p})$, notiert mit dem Buchstaben v, sind Bispinoren von der Form

$$\mathsf{u}_{\vec{p}} = F \begin{bmatrix} \eta \\ G\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\eta \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{v}_{\vec{p}} = F \begin{bmatrix} -G\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\eta' \\ \eta' \end{bmatrix}. \tag{5.66}$$

wo $G \equiv G(\vec{p})$ mit

$$G(\vec{p}) = \frac{c}{E(\vec{p}) + mc^2}, \tag{5.67}$$

η, η' beliebige Paulispinoren, normiert $\eta^\dagger\eta = \eta'^\dagger\eta' = 1$, und $F = F(\vec{p})$ eine Normierungskonstante – vgl. Gl. (5.71).

Die beiden Eigenwerte $\varepsilon = \pm E(\vec{p})$ sind jeweils zweifach entartet. Jeder Paulispinor – und damit jeder, nach dem Vorzeichen der Energie unterschiedener Amplitudenspinor – ist Linearkombination zweier, nach Gesichtspunkten der Zweckmäßigkeit gewählter, linear unabhängiger Paulispinoren. Beliebt ist die kanonische Basis

$$\eta_\uparrow := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_\downarrow := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

[8] Erst in einer quantenfeldtheoretischen Reformulierung, bei der das Dirac-Feld mittels Antikommutatoren quantisiert wird, wird diese Anomalie beseitigt und der resultierende Hamiltonian ist definit (von unten beschränkt).

Mit dieser Wahl und der Abkürzung $p_\pm = p_x \pm ip_y$ sind die stationären Lösungen der Diracgleichung zu positivem $\varepsilon = +E(\vec{p})$ gegeben

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}\uparrow}(\vec{x},t) = F \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ Gp_z \\ Gp_+ \end{bmatrix}}_{\mathsf{u}_{\vec{p}\uparrow}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}-\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}}, \quad \psi^{(+)}_{\vec{p}\downarrow}(\vec{x},t) = F \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ Gp_- \\ -Gp_z \end{bmatrix}}_{\mathsf{u}_{\vec{p}\downarrow}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}-\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}}, \tag{5.69}$$

und die stationären Lösungen zu negativem $\varepsilon = -E(\vec{p})$

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}\uparrow}(\vec{x},t) = F \underbrace{\begin{bmatrix} -Gp_z \\ -Gp_+ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{v}_{\vec{p}\uparrow}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}+\frac{\hbar}{i}Et}}{\sqrt{V}}, \quad \psi^{(-)}_{\vec{p}\downarrow}(\vec{x},t) = F \underbrace{\begin{bmatrix} -Gp_- \\ Gp_z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{v}_{\vec{p}\downarrow}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}+\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}}. \tag{5.70}$$

Wählt man abschließend[9]

$$F(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}) + mc^2}{2E(\vec{p})}} \tag{5.71}$$

[9]Die gleiche Konvention findet sich auch in Tannoudji, Roc & Grynberg "Photons and Atoms" und Bogoliubov & Sirkov "Quantenfelder", Gl. (5.16). In Bjorken & Drell "Relativistische Quantenmechanik", Schwabl "Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM-II)" sowie Mandl & Shaw "Quantum Field Theory" ist die Normierung $\mathsf{u}^\dagger\mathsf{u} = E/mc^2$. Unter Lo'tra sollte "Dichte mal Volumen" konstant bleiben, und da "Volumen" wegen Lorentzkontraktion um den Faktor $\sqrt{1-(v/c)^2}$ schrumpft, sollte sich "Dichte" um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = E/(mc^2)$ vergrößern. Da mit dieser Normierung masselose Diracteilchen (Neutrinos) extra behandelt werden müssen, wählt Griffith "Introduction to Elementary Particles" die Normierung $\mathsf{u}^\dagger\mathsf{u} = 2E/c$.

erweisen sich die hier angeführten Amplitudenspinoren orthonormal,

$$\mathsf{u}_{\vec{p}s}{}^{\dagger}\mathsf{u}_{\vec{p}s'} = \delta_{ss'}\,, \qquad \mathsf{v}_{\vec{p}s}{}^{\dagger}\mathsf{v}_{\vec{p}s'} = \delta_{ss'}\,, \qquad \mathsf{u}_{\vec{p}s}{}^{\dagger}\mathsf{v}_{\vec{p}s'} = \mathsf{v}_{\vec{p}s}{}^{\dagger}\mathsf{u}_{\vec{p}s'} = 0\,, \tag{5.72}$$

und vollständig,

$$\mathsf{u}_{\vec{p}\uparrow}\mathsf{u}^{\dagger}_{\vec{p}\uparrow} + \mathsf{u}_{\vec{p}\downarrow}\mathsf{u}^{\dagger}_{\vec{p}\downarrow} + \mathsf{v}_{\vec{p}\uparrow}\mathsf{v}^{\dagger}_{\vec{p}\uparrow} + \mathsf{v}_{\vec{p}\downarrow}\mathsf{v}^{\dagger}_{\vec{p}\downarrow} = 1_4\,. \tag{5.73}$$

Das Subskript s bzw. s' in (5.72) ist ein symbolisches Label mit Werten $s = \uparrow, \downarrow$. Dabei ist zu beachten, dass $\uparrow$ (oder $\downarrow$) nur im Falle $p_x = p_y = 0$ einen Eigenzustand von Σ_z kennzeichnen.

5.5 Diracs Löchertheorie und Ladungskonjugation $\mathcal{C}$

Versucht man die Zustande zu negativem $\varepsilon = -E(\vec{p})$ im üblichen Sinne einer Ein-Teilchen Schrödingertheorie zu deuten, sieht man sich mit Problemen konfrontiert, die durch die Erfahrung nicht gedeckt sind:

- Neg-ε Teilchen vermindern ihre kinetische Energie durch Impulsaufnahme. Durch Energieabgabe werden Sie schneller, nicht langsamer.
- Neg-ε Elektronen fühlen sich von Protonen abgestoßen, nicht angezogen.

Andererseits können die Neg-ε Zustände nicht einfach aus der Theorie ausgeschlossen werden, da die Pos-ε Zustände nicht vollständig, jedes genügend lokalisierte Wellenpakte notwendig auch Neg-ε Komponenten aufweist, und im übrigen Pos-ε Elektronen durch Strahlungsübergang in Neg-ε Zustände übergehen können.

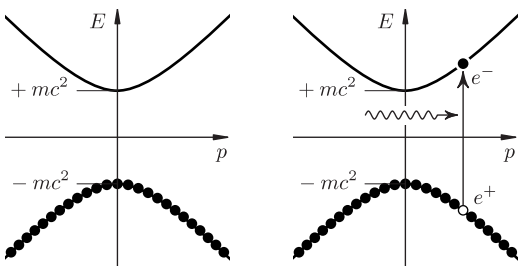

Abb 5.1 *Zur Dirac'schen Löchertheorie. Linke Seite: Im Grundzustand der Dirac'schen Löcherehtheorie sind alle Neg-ε Zustände besetzt. Rechte Seite: Paarerzeugung – der Übergang eines Neg-ε in einen Pos-ε hinterlässt ein Loch im Diracsee, das als Positron interpretiert wird.*

Diracs Vorschlag mit diesem Dilemma fertig zu werden,[10]

(1) Dirac-Teilchen unterliegen dem Paulischen Ausschließungsprinzip, wonach keine zwei Fermionen ein-und-denselben Zustand besetzen können.

(2) Im Grundzustand – dem sog. Vakuumzustand – sind alle Neg-ε Zustände jeweils mit genau einem Teilchen besetzt und alle Pos-ε Zustände sind unbesetzt.

Im Grundzustand G sind alle Neg-ε Zustände einfach besetzt. Die Gesamtenergie in diesem Zustand ist dann $E_G = -\sum_{(\vec{p},s)} E(\vec{p})$. Im Zustand L, in dem alle ein-Teilchen Neg-ε-Zustände bis auf einen Einteilchenzustand mit Quantenzahlen $(-E(\vec{p}_0), \vec{p}_0, s_0)$ besetzt sind, ist die Energie etwas größer, $E_L = -\sum_{(\vec{p},s)\neq(\vec{p}_0,s_0)} E(\vec{p}) = -\sum_{(\vec{p},s)} E(\vec{p}) + E(\vec{p}_0) = E_G + E(\vec{p}_0)$. Ähnlich die Gesamtladung Q, Gesamtimpuls $\vec{P}$ und Spinpolarisierung S. Im Grundzustand $Q_G = \sum_{(\vec{p},s)} e$, im Zustand L hingegen $Q_L = \sum_{(\vec{p},s)\neq(\vec{p}_0,s_0)} e = Q_g - e$. Ist also im ansonsten vollen Diracsee der Neg-ε Zustände zur Ladung e ein Zustand mit Quantenzahlen $(-E(\vec{p}), -\vec{p}, -s)$ unbesetzt entspricht das einem besetzten Zustand mit Quantenzahlen $(+E(\vec{p}), +\vec{p}, +s)$ zur Ladung $-e$ – angesichts $E > 0$ ist das der Zustand eines realen Teilchens!

Ein Neg-ε Elektron des Diracsees kann Strahlung absorbieren, und dadurch in einen Pos-ε Zustand übergehen. Beobachtet würde dann ein Elektron im üblichen Sinne (Ladung $-|e_0|$, Energie $+E$), und ein Loch im Diracsee, das relativ zum intakten See als Anwesenheit eines Teilchens der Ladung $+|e_0|$ und der Energie $+E$ wahrgenommen würde. Das hier von Dirac erstmals postulierte neue Teilchen wurde kurze Zeit später in der Höhenstrahlung nachgewiesen, und fungiert heutzutage unter dem Namen "Positron". Im Sinne der Diracschen Löchertheorie sind Positronen unbesetzte

[10] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London), **A 126**, 360 (1930). Vgl. auch J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35**, 939 (1930).

Neg-ε-Zustände im Diracsee der Elektronen.[11]

Elektron und Positron bilden ein "Teilchen – Antiteilchen" Paar. Konventionsgemäß wird das Elektron als "Teilchen" und das Positron als "Antiteilchen" des Elektrons aufgefasst. Ebensogut könnte man aber auch das Positron als Teilchen, und das Elektron als Antitteilchen des Positrons auffassen.

Positronen sind Teilchen wie Du und ich. Von Elektronen unterscheiden sie sich nur in ihrer elektrischen Ladung: wo Elektronen mit der Ladung $e = -e_0$ daher kommen, kommen Positronen mit der Ladung $e = +e_0$ daher. Die Wellenfunktion eines Positrons, im folgenden bezeichnet Ψ_{e^+}, genügt einer Diracgleichung, die sich nur im Vorzeichen der Kopplungskonstanten von der Diracgleichung des Elektrons (5.17) unterscheidet,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{e^+} = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A}\right) + mc^2\beta - e\Phi 1_4\right]\Psi_{e^+}\,. \tag{5.74}$$

Gemäß Löchertheorie sollte es möglich sein, jeder Lösung Ψ der Elektronen-Diracgleichung (5.17) eine bestimmte Lösung $\Psi_{\mathcal{C}}$ der Positronen-Diracgleichung (5.74) zuzuord-

[11] Haben Sie einen Gartenzaun dem eine Latte fehlt, haben Sie ein Loch. Sitzt das Loch rechts, und Sie wollen es aus ästhetischen Gründen nach links bringen, müssen Sie die Latten im Zaun nach rechts verschieben. PhysikerInnen würden sagen "nach links laufende Löcher sind nach rechts laufende Zaunlatten".

Der Transport des Loches (nach links) ist übrigens mit Impuls verbunden (nach rechts). Davon überzeugt man sich, wenn man sich beim Transport des Loches die Finger klemmt. Obwohl ein Loch also eigentlich ein "Nicht-Daseiendes" ist, kann man sich an ihm verletzen: das "Nicht-Daseiende" ist ein ziemlich handfestes Etwas. Das ist im wesentlichen die Löchertheorie nach Dirac. Freie Latten, also Latten, die nicht im Gartenzaun gebunden sind, sind Elektronen im üblichen Sinne. Der Gartenzaun ist der Diracsee, und Zaunlatten sind die Neg-ε-Elektronen. Löcher im Gartenzaun sind die Positronen. Um in einem ansonsten intakten Gartenzaun eine Latter herauszureißen müssen Sie natürlich Energie aufbringen ...

nen. Da Elektronen und Positronen gleichberechtigte Teilchen, sollte die Abbildung $\Psi \mapsto \Psi_{\mathfrak{e}}$ umkehrbar eindeutig und normerhaltend sein.

Satz Genügt $\Psi(\vec{x}, t)$ der Elektronen-Diracgleichung (5.17), so genügt

$$\Psi_{\mathfrak{e}}(\vec{x}, t) = i\beta\alpha^2\Psi^*(\vec{x}, t) \tag{5.75}$$

der Positronen-Diracgleichung (5.74), wobei in Standarddarstellung

$$i\beta\alpha^2 = i\begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.76}$$

Der *Beweis* ist schnell erbracht. Elektronen- und Positronengleichung unterscheien sich zunächst lediglich durch das relative Vorzeichen der Ableitungs und Potentialterme. Die Überführung des relativen Vorzeichens der Elektronengleichung in das relative Vorzeichen in der Positronengleichung wird am einfachsten durch die komplex-Konjugation der Elektronengleichung (5.17) erreicht,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^* = \left[c\vec{\alpha}^* \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A}\right) - mc^2\beta - e\Phi 1_4\right]\Psi^*. \tag{5.77}$$

Um nun noch das Vorzeichen des Masseterms zu reparieren und die Komplex-Konjugation der α rückgängig zu machen suchen wir eine Ähnlichkeitstrafo $\alpha^* \mapsto \alpha = C\alpha^*C^{-1}$, $\beta \mapsto -\beta = C\beta C^{-1}$, womit dann $\Psi_{\mathfrak{e}} = C\Psi^*$. Normerhaltung bedeutet, dass C unitär, $C^\dagger = C^{-1}$. In der Standarddarstellung ist lediglich α^2 von der Komplex-Konjugation betroffen, $\alpha^{2*} = -\alpha^2$, und so verwundert es nicht, dass die fragliche Ähnlichkeitstrafo $C = \eta_C\beta\alpha^2$, wobei der zunächst beliebige Phasenfaktor η_C üblicherweise gewählt wird $\eta_C = i$. *qed*

Die in (5.75) angegebene Abbildung läuft unter dem Begriff **Ladungskonjugation**. Die Ladungkonjugation eines Neg-ε mit "Spin rauf" liefert

$$\Psi(\vec{x},t) = F \begin{bmatrix} -Gp_z \\ -Gp_+ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}+\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}} \mapsto \Psi_{\mathcal{C}}(\vec{x},t) = -F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -Gp_- \\ Gp_z \end{bmatrix} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}-\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}} \quad (5.78)$$

kurz: neben Ladungsumkehr auch Impuls-Umkehr, ε-Umkehr, und Spin-Umkehr. Im Sinne der Löchertheorie: Die Abwesenheit eines Neg-ε, dessen Wellenfunktion durch Ψ gegeben, ist physikalische ununterscheidbar von der Anwesenheit eines Pos-ε, dessen Wellenfunktion durch $\Psi_{\mathcal{C}}$ gegeben.

5.6 Feynmans Positrontheorie und der Feynman-Propagator

In der Dirac'schen Löchertheorie wird die Vernichtung eines Neg-ε Elektrons mit der Erzeugung eines Pos-ε Positrons identifiziert, die Erzeugung von Elektron-Positron Paaren gehen Hand in Hand mit der Vernichtung von Photonen, und in der Vernichtung von Elektron-Positron Paaren werden Photonen erzeugt.

In der Quantenelektrodynamik, unter Eingeweihten QED, wird – aufbauend auf der Diracgleichung und den Maxwell'schen Gleichungen – eine Vielteilchentheorie formuliert in der auch Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse umstandslos beschrieben werden können. Die Formulierung folgt zwar den bereits vertrauten Pfaden, ist aber ein wenig fummelig, weshalb wir sie auf später verschieben.

Wie nämlich Feynman eindrücklich demonstriert hat können schon mit der Diracschen Wellenfunktion Prozesse wie Paarvernichtung und Paarerzeugung korrekt be-

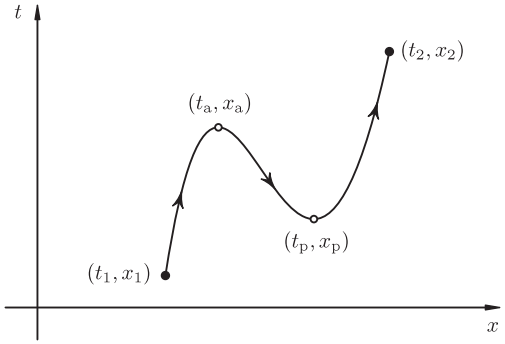

Abb 5.2 *Zur Feynman'schen Positronentheorie. Weltlinie eines Diracteilchens. Auf dem Segment* $(t_1, x_1) - (t_a, x_a)$ *mit Ladung* e*, auf dem Segment* $(t_a, x_a) - (t_p, x_p)$ *mit Ladung* $-e$*, und auf dem Segment* $(t_p, x_p) - (t_2, x_2)$ *wieder mit Ladung* e*.(*

schrieben werden.

Der zentrale Gedanke der Feynmann'schen Formulierung lässt sich anhand der relativistischen Bewegungsgleichung einer Punktladung im elektromagnetischen Feld motivieren,

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = eF^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau}\,, \tag{5.79}$$

wo $\tau = \tau(t)$ die Eigenzeit des Teilchens, üblicherweise eine monoton wachsende Funktion der Laborzeit t, also $\tau(t_2) > \tau(t_1)$ für $t_2 > t_1$.

Kehrt man hier die Eigenzeit τ um, $\tau \mapsto \tau' = . - \tau$, [12] wird die Weltlinie $x'^\mu(\tau') = x^\mu(-\tau')$ mit wachsendem τ' gemessen am Lauf der Zeit "zeitlich rückwärts" durchlaufen. Die zeitlich rückwärts durchlaufene Weltlinie genügt einer Differentialgleichung die sich nur im Vorzeichen von e von der Differentialgleichung () unterscheidet. Formuliert in der Metaphorik von Zeitreisen: ein Elektron (Positron), das rückwärts in der Zeit reist ist von einem Positron (Elektron) das vorwärts in der Zeit reist, nicht zu unterscheiden.

In der Quantenmechanik reisen keine Teilchen, sondern es propagieren Wellen bzw Zustände. Dabei ist nach Feynman die zeitliche Entwicklung eines Zustands mit der Drehung, die der Zeiger $\Psi/|\Psi|$ im Lauf der Zeit (gemeint ist hier immer die Laborzeit) ausführt, gegeben. Dreht sich der Zeiger mit zunehmender Zeit im Uhrzeigersinn, so entwickelt sich der Zustand zeitlich vorwärts. Dreht sich der Zeiger mit abnehmender Zeit im Uhrzeigersinn, entwickelt er sich zeitlich rückwärts. Entsprechend sind für $E > 0$ die Zeitfunktionen e^{-iEt} bzw e^{+iEt} die Zeiger eines zeitlich vorwärts bzw rückwärts propagierenden Zustands.[13] Ein neg-ε Elektronenzustand, sofern er zeitlich rückwärts propagiert, ist von einem pos-ε Positronenzustand, der

[12] Eigenzeitumkehr ist nicht mit Zeitumkehr zu verwechseln.

[13] Im Gegensatz zum Zeiger e^{-iEt}, der sich mit zunehmender Zeit im Uhrzeigersinn dreht, dreht sich der Zeiger e^{iEt} mit abnehmender Zeit im Uhrzeigersinn.

zeitlich vorwärts propagiert, nicht zu unterscheiden. Das ist im wesentlichen die Interpretation der neg-ε Lösungen nach Stückelberg und Feynman.[14].

Im Rahmen der Löchertheorie: Wird bei $\vec{x}_1$ zur Zeit t_1 ein Positron erzeugt, das dann bei x_2 zu einer späteren Zeit $t_2 > t_1$ wieder vernichtet wird, so kann das auch gelesen werden: zur Zeit t_2 wird ein Neg-ε Elektron erzeugt, das zu einer früheren Zeit $t_1 < t_2$ vernichtet wurde. Positronen sind Elektronen, die sich raumgespiegelt rückwärts in der Zeit entwickeln.[15]

Die Diracgleichung

$$\left(i\hbar\partial_t - \hat{H}_0\right)|\Psi\rangle = \hat{V}|\Psi\rangle \tag{5.80}$$

wo abkürzend

$$\hat{H}_0 = c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + mc^2\beta\,, \qquad \hat{V} = e(\Phi - c\vec{\alpha}\cdot\vec{A}) \tag{5.81}$$

wird mittels einer Greensfunktion der freien Gleichung

$$\left(i\hbar\partial_t - \hat{H}_0\right)\hat{G}_0(t,t') = \delta(t-t') \tag{5.82}$$

zur Integralgleichung für $|\Psi\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = |\phi(t)\rangle + \int dt'\hat{G}_0(t,t')\hat{V}(t')|\Psi(t')\rangle \tag{5.83}$$

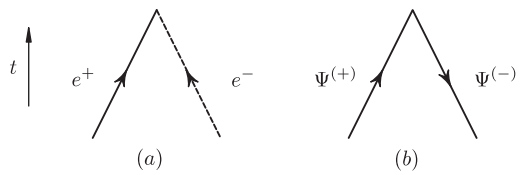

Abb 5.3 *Paarvernichtung in der Feynman'schen Darstellung.*

[14] E.C.G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **14.32L**, 588 (1941); R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949)

[15] Wie kommt das Loch in den Zaun? Indem eine Latte aus dem Zaun entfernt wird. Die Geburt des Lochs, verbunden mit der Geburt einer freien Latte, fällt mit dem Tod einer Latte im Gartenzaun zusammen. Wird der Zaun später repariert, indem die freie Latte wieder eingesetzt wird, verschwindet das Loch. Der Tod eines Loches, verbunden mit dem Tod einer freien Latte, fällt mit der (Wieder-)Geburt einer Gartenzaun-Latte zusammen. Das Loch und freie Latte (Positron und Elektron) folgen hier der Konvention "erst geboren dann gestorben". Die entnommene Gartenzaun-Latte stirbt als Element des Gartenzauns bevor sie (wieder-)geboren wird: Sie entwickelt sich zeitlich rückwärts.

mit $\Phi(t)$ eine Lösung der freien Diracgleichung.

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{(+)} + \hat{H}_0^{(-)} \tag{5.84}$$

$$\hat{H}_0^{(+)} = \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p}) |\phi_{\vec{p},s}^{(+)}\rangle\langle\phi_{\vec{p},s}^{(+)}| \tag{5.85}$$

$$\hat{H}_0^{(-)} = -\sum_{\vec{p},s} E(\vec{p}) |\phi_{\vec{p},s}^{(-)}\rangle\langle\phi_{\vec{p},x}^{(-)}| \tag{5.86}$$

Mit Feynmann-Randbedingungen "pos-ε vorwärts, neg-ε rückwärts in der Zeit"

$$\hat{G}_0(t,t') = -i\hbar\theta(t-t') \sum_{\vec{p},s} |\phi_{\vec{p},s}^{(+)}\rangle\langle\phi_{\vec{p},s}^{(+)}| e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t')} + i\hbar\theta(t'-t) \sum_{\vec{p},s} |\phi_{\vec{p},s}^{(-)}\rangle\langle\phi_{\vec{p},s}^{(-)}| e^{+\frac{i}{\hbar}E(t-t')} \tag{5.87}$$

Streuwelle

$$|\Psi(t)\rangle - |\phi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{p},s} |\phi_{\vec{p},s}^{(+)}(t)\rangle \int_{infty}^{t} dt' \langle\phi_{\vec{p},s}^{(+)}(t')|\hat{V}(t')|\Psi(t')\rangle \tag{5.88}$$

$$+\frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{p},s} |\phi_{\vec{p},s}^{(-)}(t)\rangle \int_{t}^{\infty} dt' \langle\phi_{\vec{p},s}^{(-)}(t')|\hat{V}(t')|\Psi(t')\rangle\,, \tag{5.89}$$

enthält in der fernen Zukunft nur pos-ε, in der fernen Vergangenheit nur neg-ε Komponenten.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar}\epsilon_f \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle\phi_f(t')|\hat{V}(t')|\Psi_i(t')\rangle\,, \tag{5.90}$$

worin ϕ_f freie Welle mit Quantenzahlen f, ϵ_f das Energievorzeichen von ϕ_f, und $|\Psi_i\rangle$ Lsg der Diracgleichung mit Quantenzahlen i, die entweder in der fernen Vergangenheit pos-ε, oder in der fernen Zukunft neg-ε.

Beispiel Mott-Streuung – ist die elastische Streuung eines Spin-$\frac{1}{2}$ Elektrons an einer statischen, punktförmigen Ladung Ze ohne Spin, also reine Coulombwechselwirkung $\vec{A} = 0$ und

$$\hat{V}(\vec{x}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}|}\,. \tag{5.91}$$

Einfallendes Elektron in der fernen Vergangenheit $\phi^{(+)}_{\vec{p}_i,s_i}(\vec{x},t)$. W'keitsamplitude für die Streuung in freien Zustand $\phi^{(+)}_{\vec{p}_f,s_f}(\vec{x},t)$ in Born'scher Näherung

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\phi^{(+)}_{\vec{p}_f,s_f}(t')|\hat{V}(t')|\phi^{(+)}_{\vec{p}_i,s_i}(t')\rangle && (5.92)\\
&= iZ\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}}_{=\alpha c}\frac{1}{V}(u_{\vec{p}_f,s_f}|u_{\vec{p}_i,s_i})\underbrace{\int_{\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t}}_{=2\pi\hbar\delta(E_f-E_i)}dt\underbrace{\int e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f-\vec{p}_i)\cdot\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}|}d^3x}_{=\frac{4\pi\hbar^2}{|\vec{p}_f-\vec{p}_i|^2}} && (5.93)\\
&= i8\pi^2 Z\alpha\frac{c\hbar^3}{V|\vec{p}_f-\vec{p}_i|^2}(u_{\vec{p}_f,s_f}|u_{\vec{p}_i,s_i})\delta(E_f-E_i) && (5.94)
\end{aligned}$$

Mit $Vd^3p_f/(2\pi\hbar)^3$ die Zahl der Zustände gegebener Spinpolarisation s_f und Impuls in einem bei $\vec{p}_f$ zentrierten Volümchen d^3p_f, ist die W'keit für die Streuung in einen dieser Zustände gegeben

$$\begin{aligned}
w_{\{f\}\leftarrow i} &= |S_{fi}|^2\frac{Vd^3p_f}{(2\pi)^3} && (5.95)\\
&= 4Z^2\frac{\alpha^2\hbar^2c^2}{V|\vec{p}_f-\vec{p}_i|^4}|(u_{\vec{p}_f,s_f}|u_{\vec{p}_i,s_i})|^2T\delta(E_f-E_i)d^3p_f && (5.96)
\end{aligned}$$

wobei – wie in der üblichen Ableitung von Fermi's Goldener Regel – die Substitution $[2\pi\hbar\delta(E_f-E_I)]^2 \mapsto 2\pi\hbar T\delta(E_f-E_i)$, vorgenommen wurde, wobei T die

Wechselwirkungszeit.[16]

Die W'keit (), dividiert durch die Wechselwirkungszeit T, gibt die Rate für die Streuung $\vec{p}_i \to \vec{p}_{\{f\}}$ in den um die Richtung $\vec{p}_f$ zentrierten Raumwinkel $d\Omega$. Diese Rate, dividiert durch den Betrag der Stromdichte der einfallenden Teilchen, gibt den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma$. Die Stromdichte der einfallenden Teilchen $\vec{j}^{\text{in}}$ ist nach () gegeben $\vec{j}^{\text{in}} = c u^\dagger_{\vec{p}_i,s_i} \vec{\alpha} u_{\vec{p}_i,s_i}$, mit der hier vorgenommenen Normierung $|\vec{j}^{\text{in}}| = |\vec{v}_i|/V$, wo $\vec{v}_i = c^2\vec{p}_i/E_i$ die Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen. Daher

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4Z^2\alpha^2 \frac{\hbar^2 E_i^2}{c^2|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4} |(u_{\vec{p}_f,s_f}|u_{\vec{p}_i,s_i})|^2 \tag{5.97}$$

Angesichts

$$|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^4 = (\vec{p}_f^2 + \vec{p}_i^2 - 2\vec{p}_f \cdot \vec{p}_i)^2 = 4\vec{p}^4(1-\cos\vartheta)^2 = 16\vec{p}^4 \sin^4(\vartheta/4) \tag{5.98}$$

also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2\hbar^2}{4\vec{p}^2\beta^2\sin^4(\vartheta/2)} \underbrace{|(u_{\vec{p}_f,s_f}|u_{\vec{p}_i,s_i})|^2}_{=1-\beta^2\sin^2(\vartheta/2)} \tag{5.99}$$

wobei die underbrace nach Mittelung über die Polaristation im Eingangskanal und Blindheit des Detektors gegenüber Spinpolarisation im Ausgangskanal.

[16] Das Zeitintegral in Gl. (), für endliche Wechselwirkungszeit T liest sich $\int_{-T/2}^{T/2} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} dt = 2\frac{\sin((E_f-E_i)T/(2\hbar))}{(E_f-E_i)/\hbar}$. Für großes, aber endliches T, ist das Quadrat – als Funktion von E_f – eine bei E_i scharf lokalisierte Funktion mit Integral $2\pi\hbar T$.