Kapitel 6

Helizität, Chiralität und $\mathcal{PCT}$

6.1 Helizität

Mit der Wahl (5.68) werden die Zustände (5.69) und (5.70) zu $\vec{p} = 0$ nach der Spinpolarisation in z-Richtung sortiert: in der Standarddarstellung (5.8) von $\vec{\Sigma}$, Gl. (5.15), sind $\mathsf{u}_{\vec{0}\uparrow}$ und $\mathsf{v}_{\vec{0}\uparrow}$ Eigenzustände von Σ_z zum Eigenwert $+1$, $\mathsf{u}_{\vec{0}\downarrow}$ und $\mathsf{v}_{\vec{0}\downarrow}$ sind Eigenzustände von Σ_z zum Eigenwert -1.

Für bewegte Teilchen ist diese Klassifikation zwar erschöpfend, aber nicht unbedingt sinnvoll – gegenüber all den Richtungen, in denen sich das Teilchen bewegen kann, ist die z-Richtung durch nichts ausgezeichnet. Die ausgezeichnete Richtung ist vielmehr die Bewegungsrichtung $\vec{p}/|\vec{p}|$, und so kann es nicht verwundern, dass

die Spinprojektion in Bewegungsrichtung, in der Teilchenphysik genannt **Helizität**,[1]

$$h(\vec{p}) := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\Sigma}\,, \tag{6.1}$$

gerne zur Klassifikation bewegter Teilchen herangezogen wird. In der Tat vertauscht die Helizität $h(\vec{p})$ mit der Hamiltonmatrix $H_D(\vec{p})$, vgl. (5.58), d.h. $h(\vec{p})$ und $H_D(\vec{p})$ lassen sich gemeinsam diagonalisieren. Benutzen wir an dieser Stelle Kugelkoordinaten, $\vec{p}/|\vec{p}| = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)$, führen an dieser Stelle helikale Pauli-Spinoren ein,

$$\eta_+(\vec{p}) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi/2}\sin(\vartheta/2) \end{pmatrix}, \qquad \eta_-(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi/2}\cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

bestätigen $\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\eta_+(\vec{p}) = +1|\vec{p}|\eta_+(\vec{p})$ und $\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\eta_-(\vec{p}) = -|\vec{p}|\eta_-(\vec{p})$, lassen sich die Eigenspinoren zu gegebenem Impuls $\vec{p}$, H_{D}-Eigenwerten $\varepsilon = \pm E(\vec{p})$ und Helizität $h = \pm 1$ angeben. Eigenspinoren zu **positiver Helizität** $h = +1$ heißen **rechtszirkular**, Eigenspinoren zu **negativer Helizität** $h = -1$ heißen **linkszirkular**.[2] Helizität ist allerdings nur für masselose Teilchen eine absolute Teilcheneigenschaft. Massive Teilchen lassen sich durch einen Wechsel des Bezugssystems "überholen", so dass aus $\vec{p}$-Teilchen $-\vec{p}$-Teilchen werden, und somit die Helizität beispielsweise von $h = +1$ nach $h = -1$ wechselt.

6.2 Parität $\mathcal{P}$ (Raumspiegelung)

Unter **Raumspiegelung** $\mathcal{P}$, definiert $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = -\vec{x}$, transformiert $\vec{p} \mapsto \vec{p}' = -\vec{p}$, somit $\vec{\ell} \mapsto \vec{\ell}' = \vec{\ell}$ und also auch $\vec{s} \mapsto \vec{s}' = \vec{s}$. Postuliert man nun die Invari-

[1] "Helizität" ist ein aus dem griechischen stammendes Kunstwort (ἕλιξ, dt: helix "das Gewundene") das den Drehsinn eines Teilchens in Bezug auf seine Bewegungsrichtung bezeichnet.

[2] Statt rechts- und linkszirkular sind auch "rechts-" und "linkshändig" in Gebrauch.

anz der elektrischen Ladung, und die Kovarianz $\vec{E}(\vec{x},t) \mapsto \vec{E}'(\vec{x},t) = -\vec{E}(-\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t) \mapsto \vec{B}'(\vec{x},t) = +\vec{B}(-\vec{x},t)$, bzw $\Phi(\vec{x},t) \mapsto \Phi'(\vec{x},t) = +\Phi(-\vec{x},t)$ und $\vec{A}(\vec{x},t) \mapsto \vec{A}'(\vec{x},t) = -\vec{A}(-\vec{x},t)$ erweist sich die Maxwellsche Elektrodynamik als invariant unter Raumspiegelung: bei elektrodynamischen Prozessen kann nicht entschieden werden, ob man "in den Spiegel schaut" oder nicht. Gepflegt ausgedrückt: Raumspiegelung ist eine Symmetrie der Elektrodynamik.

Auch die Bewegungsgleichung einer Punktladung im elektromagnetischen Feld ist invariant unter Raumspiegelung: genügt nämlich der Ortsvektor $\vec{q}(t)$ der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{q}} = e\left[\vec{E}(\vec{q},t) + \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q},t)\right]$ bezogen auf ein "ungespiegeltes Koordinatensystem", dann genügt der gespiegelte Ortsvektor $\vec{q'} = -\vec{q}$ der gleichen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{q'}} = e\left[\vec{E}'(\vec{q'},t) + \dot{\vec{q'}} \times \vec{B}(\vec{q'},t)\right]$ bezogen auf ein "raumgespiegeltens" Koordinatensystem.

Die Pauligleichung ist invariant unter Raumspiegelung sofern die Paulispinorfunktion unter Raumspiegelung kovariiert $\psi(\vec{x},t) \mapsto \psi'(\vec{x},t) = \eta_P \psi(-\vec{x},t)$ wo η_P beliebiger Phasor, $|\eta_P| = 1$, traditionell $\eta_P = 1$. In der vollen Diracgleichung erscheint der Impuls aber linear, dreht daher unter Raumspiegelung sein Vorzeichen um.

Satz Genügt Ψ im ungestrichenen Koordinatensystem $(ct, \vec{x})$ der Dirac-Gleichung im Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$, dann genügt

$$\Psi'(\vec{x}', t') = \eta_P \beta \Psi(-\vec{x}', t') \tag{6.3}$$

mit $\eta_P = \pm 1, \pm i$ der Dirac-Gleichung im gestrichenen Koordinatensystem $(ct', \vec{x}') = (ct, -\vec{x})$ im Raum-gespiegelten Potential $\vec{A}'(\vec{x}', t') = -\vec{A}(-\vec{x}', t')$, $\Phi'(\vec{x}', t') = \Phi(-\vec{x}', t')$.

6.3 Chiralität und Weyl-Gleichungen

Für Diracteilchen gibt es eine intrinsische Observable **Chiralität**[3]

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 := -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3 \,. \tag{6.4}$$

die insbesondere für masselose Diracteilchen eine wichtige Rolle spielt.

Mittels Algebra der α-Matrizen zeigt man hier leicht, dass γ^5 mit β antikommutiert, hingegen mit mit α und Σ kommutiert. Außerdem ist γ^5 hermitesch, $\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}$, spurlos, angesichts $\gamma^5\gamma^5 = 1$ also Eigenwerte $\iota = \pm 1$, jeweils zweifach entartet. Eigenspinoren zu **positiver Chiralität** $\iota = +1$ heißen **rechtshändig**, Eigenspinoren zu **negativer Chiralität** $\iota = -1$ heißen **linkshändig**.

In der Standarddarstellung

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{bmatrix} , \tag{6.5}$$

wobei rechts- bzw. linkshändige Diracspinoren von der Form $\begin{bmatrix} \eta \\ \eta \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} \eta' \\ -\eta' \end{bmatrix}$ (η und η' sind zwei-komponentige Paulispinoren).

Matrizen $\frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right)$ sind Projektoren, idempotent $\left[\frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5\right)$, orthogonal $\left[\frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right)\right] = 0$, und vollständig $\frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right) = 1$. Ein allgemeiner Diracspinor kann demnach zerlegt werden $\Psi = \Psi_{\mathrm{R}} + \Psi_{\mathrm{L}}$ mit

$$\Psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right)\Psi \,, \qquad \Psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right)\Psi \,. \tag{6.6}$$

[3] "Chiralität" ist ein griechisches Kunstwort (Stamm: $\chi\epsilon\iota\rho$-, dt: hand-), das am besten mit "Händigkeit" übersetzt wird. Ein Ding ist chiral, wenn sein Spiegelbild nicht durch eine Drehung mit dem Original zur Deckung gebracht werden kann. Eine Hand, beispielsweise, ist chiral.

Offensichtlich gilt $\gamma^5\Psi_\mathrm{R} = +1\Psi_\mathrm{R}$, $\gamma^5\Psi_\mathrm{L} = -1\Psi_\mathrm{L}$, d.h. Ψ_R ist rechtshändiger Diracspinor (Chiralität $\iota = +1$), während Ψ_L linkshändiger Diracspinor (Chiralität $\iota = -1$).

Aus den genannten Eigenschaften von γ^5 folgt nun auch $\vec{\alpha} = \gamma^5\vec{\Sigma}$. Der Hamiltonoperator in Gl. (5.9) lässt sich daher schreiben $H_D = \gamma^5\vec{\Sigma}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + mc^2\beta$, wobei hier nun der erste Term ein Produkt von Chiralität und Helizität. Projeziert man die Diracgleichung (5.9) auf rechts- bzw. linkshändige Diracspinoren erhält man

$$i\hbar\left(\partial_t + c\vec{\Sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\Psi_\mathrm{R} = mc^2\beta\Psi_\mathrm{L}\,, \tag{6.7}$$

$$i\hbar\left(\partial_t - c\vec{\Sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\Psi_\mathrm{L} = mc^2\beta\Psi_\mathrm{R}\,. \tag{6.8}$$

Offensichtlich koppelt die Teilchenmasse die R- und L-Komponenten.

Für massive Teilchen ist mit dieser Umformung nicht viel gewonnen. Helizität und Chiralität lassen sich zwar gemeinsam diagonalisieren, aber Chiralität γ^5 ist für massive Teilchen nicht erhalten (ι ist – im Gegensatz zur Helizität h – keine gute Quantenzahl).

Für masselose Teilchen $m = 0$ impliziert die gemeinsame Diagonalisiserbarkeit von Chiralität und Helizität aber, dass die Eigenwerte von $H_D = c\gamma^5\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$ gegeben sind $h\iota c|\vec{p}| = \pm c|\vec{p}|$. Das heißt rechtsändige Pos-ε sind rechtszirkular, linkshändige Pos-ε sind linkszirkular. Da masselose Teilchen mit Geschwindigkeit c propagieren, und sich also durch einen Lorentzschub nicht "überholen" lassen, ist Helizität für masselose Teilchen absolut, d.h. unabhängig vom Bezugssystem. Übertragen auf die "innere" Eigenschaft Chiralität bedeutet das, dass die Diracgleichung zwei unterschiedliche Sorten masseloser Teilchen zulässt: rechtshändige und linkshändige.

Sei nun Ψ_R ein rechtshändiger Diracspinor, $\gamma^5\Psi_\mathrm{R} = \Psi_\mathrm{R}$. Dann ist der raumgespiegelte Spinor $\Psi' = \beta\Psi_\mathrm{R}$ linkshändig,$\gamma^5\Psi' = \gamma^5\beta\Psi_\mathrm{R} = -\beta\gamma^5\Psi_\mathrm{R} = -\beta\Psi_R = -\Psi'$.

Im Spiegel betrachtet erscheint eine linkshändige Schraube rechtshändig und vice versa. Wäre die Natur invariant unter "Spiegelung", d.h ließe sich bei natürlichen Prozessen nicht entscheiden, ob man sie "im Spiegel" sieht oder nicht, sollten es zu jedem Prozess, bei dem linkshändige im Spiel sind, immer auch einen Prozess geben, bei dem rechtshändige mit dem gleichen Wirkungsquerschnitt bzw. der gleichen Rate im Spiel sind. Das ist aber nicht der Fall. Wie in den Experimenten von Chien-Shiung Wu et al. am β-Zerfall von ^{60}Co überzeugend gezeigt, scheint es nur linkshändige Neutrinos zu geben (entsprechend nur rechtshändige Antineutrinos) zu geben.

Chiralität spielt im Standardmodell nicht nur für die Modellierung masseloser Fermionen, sondern insbesondere auch für die Analyse hochenergetischer Prozesse (wo die Ruhemassen gegenüber der kinetischen Energien vernachlässigbar sind) eine wichtige Rolle. In diesem ultrarelativistischen Grenzfall $c|\vec{p}| \gg mc^2$ empfielt sich, die Masse als "Störung" aufzufassen, und also eine Darstellung zu suchen in der γ^5 diagonal und β nebendiagonal. Als zielführend erweist sich dabei die Ähnlichkeitstransformation $(\beta, \alpha^i) \to M(\beta, \alpha^i)M^{-1}$ mit

$$M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

so dass

$$M\vec{\alpha}M^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{bmatrix}, \qquad M\beta M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M\gamma^5 M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Die hier eingeführten Matrizen definieren die sog **Weyl-Darstellung** der Dirac-Matrizen, angesichts der Diagonalität der Chiralität γ^5 zuweilen auch genannt **Chirale Darstellung**.

Unter der Ähnlichkeitstransformation () transformiert der Dirac-Bispinor der Standard-

Darstellung

$$M \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi + \chi \\ \phi - \chi \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{L}} \end{bmatrix}, \tag{6.11}$$

und die Diracgleichung () erscheint in der Form

$$i\hbar \left(\partial_t + c\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_{\mathrm{R}} = mc^2 \phi_{\mathrm{L}} \tag{6.12}$$

$$i\hbar \left(\partial_t - c\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_{\mathrm{L}} = mc^2 \phi_{\mathrm{R}} \tag{6.13}$$

für $m = 0$ genannt die **Weyl-Gleichungen**.

6.4 Zeitumkehr $\mathcal{T}$ (Bewegungsumkehr)

Unter Bewegungsumkehr $\mathcal{T}$, definiert $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$ mit $\vec{q} \mapsto \vec{q}' = \vec{q}$, transformiert $\vec{p} \mapsto \vec{p}' = -\vec{p}$, also $\vec{\ell} \mapsto \vec{\ell}' = -\vec{\ell}$, ergo $\vec{s} \mapsto \vec{s}' = -\vec{s}$. Da $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$, und $\vec{q}$ unter Bewegungsumkehr invariant, wird der Vorzeichenwechsel in der Geschwindigkeit gerne als **Zeitumkehr** gefasst. Da in der Quantenmechanik kanonisch $[q, p] = i\hbar$, könnte $[q', p'] = -i\hbar$ nicht durch unitäre Trafo erreicht werden. Ausweg: die Transformation Zeitumkehr wird "anti-unitär" dargestellt (involviert Komplex-Konjugation).

Satz Genügt Ψ im ungestrichenen Koordinatensystem der Dirac-Gleichung im Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$, dann genügt

$$\Psi'(\vec{x}', t') = i\gamma^1\gamma^3\Psi^*(\vec{x}', -t') \tag{6.14}$$

der Dirac-Gleichung im gestrichenen Koordinatensystem $(ct', \vec{x}') = (-ct, \vec{x})$ im zeitumgekehrten Potential $\vec{A}'(\vec{x}', t') = -\vec{A}(\vec{x}', -t')$, $\Phi'(\vec{x}', t') = \Phi(\vec{x}', -t')$.

Sei $\Psi(\vec{x}, t)$ Lösung der Dirac-Gleichung (). Dann ist $\Psi_{\mathcal{T}}(\vec{x}, t) = \eta_T T \Psi(\vec{x}, -t)^*$ mit $T = -i\alpha^1\alpha^3 = -i\gamma^5 C$.

6.5 $\mathcal{CPT}$

$$\Psi_{PCT}(\vec{x}, t) = i\gamma^5 \Psi(-\vec{x}, -t).$$