Kapitel 7

W'hlg: Klassische Feldtheorie

Viele Feldtheorien sind durch ihre **Wirkung** definiert

$$S[\phi_1, \ldots, \phi_N] = \frac{1}{c} \int_G d^4x \mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_N, \partial\phi_1, \ldots, \partial\phi_N; x)\,, \tag{7.1}$$

worin $\mathcal{L}$ **Lagrangedichte**, $G \subset \mathbb{R}^4$ ein Gebiet der Raumzeit, das von raumartigen Hyperflächen σ_a, σ_b begrenzt ist, $\partial\phi_a$ kurz für die partiellen Ableitungen $\partial_\mu\phi_a$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, und $d^4x = cdtd^3x$. In der Elektrodynamik werden die Felder ϕ_a, $a = 1, \ldots, N$, mit den Komponenten A^μ des 4er Potentials assoziiert, bei Dirac mit den 4 Komponenten des Dirac-Spinors usw. Die explizite x-Abhängigkeit in Gl. (7.1) berücksicht eventuell vorhandene externe Felder $j(x)$, die an die dynamischen Felder $\phi_a(x)$ koppeln, beispielsweise in der Form $j_\mu A^\mu$. Der Faktor c^{-1} garantiert, dass $\mathcal{L}$ die physikalische Dimension einer Energiedichte.

7.1 Lagrange'sche Feldtheorie

Wir beschränken uns jetzt auf ein relles Feld ϕ, also Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)\,. \tag{7.2}$$

Feldgleichungen folgen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Unter Variation $\phi \to \phi + \delta\phi$ variiert die Wirkung

$$\delta S = \frac{1}{c}\int_G \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \delta\phi \right\} d^4x \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{7.3}$$

Partielle Integration im zweiten Term, Anwendung des Gauss'schen Satzes, dabei beachten $\delta\phi|_{\partial G} = 0$, liefert die gesuchten Feldgleichungen – die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0\,. \tag{7.4}$$

Bringt man hier die Ableitungen nach der Zeit auf die andere Seite

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \tag{7.5}$$

was doch sehr an die Lagrange Form der Newton'schen Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ erinnert: offensichtlich spielt $\dot{\phi}$ die Rolle einer "Geschwindigkeit", und $\sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ die Rolle einer "Kraft".

Ein schönes Beispiel vermittelt die Lagrangedichte der reellen Klein-Gordon Theorie (ϕ reell),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2\,. \tag{7.6}$$

Wegen $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$ ist $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\phi) = \eta^{\mu\beta}\partial_\beta\phi + \eta^{\alpha\mu}\partial_\alpha\phi = 2\partial^\mu\phi$, damit Feldgleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \mu^2\phi = 0\,, \tag{7.7}$$

mit Identifikation $\mu = mc/\hbar$ Klein-Gordon Gleichung (4.3).

Im Falle mehrere Felder ϕ_a, $a = 1, \ldots, N$ die unabhängig voneinander variiert werden,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} = 0\,, \qquad a = 1, \ldots, N\,. \tag{7.8}$$

Für zwei reelle Klein-Gordon Felder gleicher Masse beispielsweise

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1,2} \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{\mu^2}{2}\phi_a^2 \tag{7.9}$$

Statt mit reellen ϕ_1, ϕ_2 wird hier gerne mit komplexen Feldern gearbeitet,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\,, \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 - i\phi_2\right)\,, \tag{7.10}$$

wobei ϕ und ϕ^* als unabhängige Variable betrachtet werden. Ausgedrückt in komplexen Feldern liest sich die Lagrangedichte (7.9)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2|\phi|^2\,.eq: FldT_LKGC \tag{7.11}$$

Euler-Lagrange zu $\delta\phi^*$ lautet

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \mu^2\phi = 0\,, \tag{7.12}$$

während Euler-Lagrange zu $\delta\phi$ gerade das konjugiert-komplexe von (7.12). Angesichts der Umkehrung

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi + \phi^*\right)\,, \qquad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\phi^* - \phi\right)\,, \tag{7.13}$$

sind die partiellen Ableitungen verknüpft

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_1} - i\frac{\partial}{\partial\phi_2}\right) \tag{7.14}$$

zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial\phi}|\phi|^2 = \phi^* \tag{7.15}$$

7.2 Energie-Impuls Tensor

Für gegebenes Feld ϕ, nicht notwendig Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen (7.5), ist $\mathcal{L}$ Funktion von x, non-chalant notiert

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); x)\,. \tag{7.16}$$

Die explizite x-Abhängigkeit berücksichtigt eventuell vorhandene externe Felder, etwa in der Form $j(x)\phi(x)$, wo $j(x)$ festes Feld.

Ableitung nach x^ν

$$\partial_\nu\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial_\nu\phi + \sum_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\partial_\mu\phi + \partial_\nu^{\text{explizit}}\mathcal{L} \tag{7.17}$$

$$= \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum_\mu\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\partial_\nu\phi + \sum_\mu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right) + \partial_\nu^{\text{explizit}}\mathcal{L} \tag{7.18}$$

Für "wahres" ϕ – also ϕ, das den Feldgleichungen genügt – ist hier $\{\ldots\} = 0$. Der Rest kann zu einer **Bilanzgleichung** zusammengefasst werden

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = -\partial_\nu^{\text{explizit}} \mathcal{L} \tag{7.19}$$

worin $T = T[\phi]$ der sog **Energie-Impulstensor**,

$$T^\mu{}_\nu[\phi] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \tag{7.20}$$

auszuwerten für wahres Feld.

Sofern $\partial^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$, also autonomes System, bedeutet $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ vier lokale Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichungen),

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} T^{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\nu} = 0\,, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3\,. \tag{7.21}$$

Räumliche Integration unter Verwendung des Gauss'schen Satzes und Annahme, dass die Felder für $|\vec{x}| \to \infty$ verschwinden, liefert globale Erhaltungssätze für des Feldes Gesamt-Energie E und -Impuls $\vec{P} = (P^1, P^2, P^3)$,

$$E := \int T^{00} d^3x\,, \qquad \frac{d}{dt} P^0 = 0\,, \tag{7.22}$$

$$P^i := \frac{1}{c} \int T^{0i} d^3x\,, \qquad \frac{d}{dt} P^i = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{7.23}$$

Erhaltungssätze sind Spezialfall eine allgemeinen Theorems von Emmy Noehter (vgl. nächster Abschnitt): jede kontinuierliche Symmetrie impliziert eine Erhaltungsgröße. Sie kennen das schon aus der klassischen Mechanik: zeitliche Translationsinvarianz (hier: $\partial_0^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$) impliziert Energieerhaltung, räumliche Translationsinvarianz (hier: $\vec{\nabla}^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$) impliziert Impulserhaltung.

Beispiel Klein-Gordon

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{7.24}$$

Insbesondere

$$T^{00} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \tag{7.25}$$

$$T^{0i} = -\frac{1}{c}\dot{\phi}\partial_i\phi\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{7.26}$$

7.3 Noether

Eine Transformation $T : \phi \to \phi' = T(\phi)$ definiert eine **Symmetrie**, wenn die transformiert Wirkung $S'[\phi'] := S[\phi]$ (wo $\phi = T^{-1}(\phi')$) invariant unter der Transformation, also $S' = S$, äquivalent $S[\phi'] = S[\phi]$.

Beispiel: Klein-Gordon ist invariant unter Feldspiegelung $\phi \to \phi' = -\phi$, nicht aber unter Verschiebung des Feld-Nullpunkts $\phi \to \phi' = \phi + \epsilon$.

Eine 1-parametrige Schar von Transformationen T_ϵ, $\epsilon \in \mathbb{R}$, normiert $T_{\epsilon=0} = \mathrm{id}$, heißt kontinuierlich, falls $S[T_\epsilon(\phi)]$ stetig von ϵ abhängt. Gilt hier $S[T_\epsilon(\phi)] = S[\phi]$ definiert die Schar T_ϵ eine **kontinuierliche Symmetrie** des Systems. Jede kontinuierliche Symmetrie, so ein Theormen von Emmy Noether, impliziert eine Erhaltungsgröße.

Hinreichend für das Vorliegen einer Symmetrie ist ein Transformationsverhalten der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu\phi'_a) = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) + \partial_\mu J^\mu \tag{7.27}$$

worin (J^μ) ein 4er Vektor mit $J|_{\partial G} = 0$. Die Wirkung bleibt von der 4er Divergenz unbeeinflusst – schließlich kann sie über die Gauss'schen Satz in ein Integral über die Oberfläche verwandelt werden, dessen Wert aber wegen $J|_{\partial G} = 0$ gleich Null.

Sei also $\mathcal{L}$ im Sinne (7.27) invariant unter T_ϵ. Für kleine ϵ ist dann

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \epsilon_a(x) \tag{7.28}$$

worin $\epsilon_a(x)$ klein von Ordnung ϵ, die genaue Form durch T bestimmt. Damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) - \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) &\approx \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \epsilon_a + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu \epsilon_a \right\} && (7.29) \\ &= \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] \epsilon_a \\ &\quad + \sum_\mu \partial_\mu \left(\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \epsilon_a \right) && (7.30) \end{aligned}$$

Für wahre Felder ist hier $[\ldots] = 0$. Führt man abkürzend ein,

$$j^\mu := \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \epsilon_a - J^\mu \tag{7.31}$$

impliziert Invarianz (7.27) eine Bilanzgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,. \tag{7.32}$$

Entsprechend ist die (7.28) zugeordnete **Noether-Ladung**

$$Q(t) := \int j^0(\vec{x}, t) d^3x \tag{7.33}$$

eine Erhaltungsgröße,

$$\frac{d}{dt} Q = 0\,. \tag{7.34}$$

Beispiel komplexe Klein-Gordon. Lagrandgedichte invariant (mit $\partial_\mu J^\mu = 0$) unter $\phi \to \phi' = e^{i\epsilon}\phi$, $\phi^* \to \phi^{*\prime} = e^{-i\epsilon}\phi^*$; für kleine ϵ ist $\delta\phi = i\epsilon\phi$ und $\delta\phi^* = -i\epsilon\phi^*$. Noether-Stromdichte

$$j^\mu = i\left[\left(\partial^\mu\phi^*\right)\phi - \phi^*\left(\partial^\mu\phi\right)\right] \tag{7.35}$$

und Noether-Ladung

$$Q = i\int\left(\dot{\phi}^*\phi - \phi^*\dot{\phi}\right)d^3x \tag{7.36}$$

erhalten,

$$\frac{d}{dt}Q = 0\,. \tag{7.37}$$

7.4 Hamilton'sche Feldtheorie

Quantenmechanik – Sie erinnern sich – basiert auf der Hamilton's chen Formulierung der Mechanik. Der Hamiltonian ist allerdings kein "kovariantes" Konzept – die Energie transformiert unter Lo'tra wie die 0-Komponente einer 4er Vektors. Hamilton'sche (Quanten)Feldtheorie kommt daher – verglichen mit der Lagrange'schen Feldtheorie – etwas unbeholfen daher.

Am Anfang steht die Wahl eine Koordinatensystems mit Auszeichnung einer Zeitkoordinate t, so dass Hyperflächen $\sigma_{a,b}$ Gleichzeitigkeitsschnitte $\sigma_{a,b} = (t_{a,b}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Wirkung

$$S[\phi] = \int_{t_a}^{t_b} L[\phi, \dot{\phi}]dt \tag{7.38}$$

worin L Lagrangefunktional

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t))d^3x \tag{7.39}$$

Achtung: Lagrangefunktional für festes t definiert, daher ϕ und $\dot{\phi}$ unabhängige Zustandsgrößen (in kl Mechanik entsprechend q und $\dot{q}$).

In Analogie zur Punktmechanik kanonisch konjugierter Impuls

$$\pi(\vec{x},t) := \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\vec{x},t)} \tag{7.40}$$

und Hamiltonfunktional

$$H[\phi,\pi] = \int \pi(\vec{x},t)\dot{\phi}(\vec{x},t)d^3x - L \tag{7.41}$$

Feldgleichungen

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\pi}\,, \qquad \frac{\partial\pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\phi} \tag{7.42}$$

Dabei beachten $\delta H/\delta\phi = \partial\mathcal{H}/\partial\phi - \vec{\nabla}\partial H/\partial(\vec{\nabla}\phi)$ – vgl. Gl. () in den Ergänzungen.

Formulierung mittels Poissonklammern `[LL(I)-Konvention, S. 166]`

$$\{f,g\} := \int \left[\frac{\delta f}{\delta\pi(\vec{x},t)}\frac{\delta g}{\delta\phi(\vec{x},t)} - \frac{\delta g}{\delta\pi(\vec{x},t)}\frac{\delta f}{\delta\phi(\vec{x},t)}\right] d^3x \tag{7.43}$$

Insbesondere

$$\{\pi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,, \tag{7.44}$$

$$\{\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)\} = \{\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)\} = 0\,, \tag{7.45}$$

sog *kanonische Poissonklammern*. Damit

$$\dot{\phi}(\vec{x},t) = \{H,\phi(\vec{x},t)\} \tag{7.46}$$

$$\dot{\pi}(\vec{x},t) = \{H,\pi(\vec{x},t)\} \tag{7.47}$$

Beispiel Klein-Gordon (reelles ϕ); Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2$, ergo

$$\pi(\vec{x},t) \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\vec{x},t)} = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\vec{x},t)\,, \tag{7.48}$$

$$\mathcal{H} = \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \tag{7.49}$$

Interpretiert: Energie gespeichert in Bewegung (zeitliche Änderung), räumlicher Modulation, und generelle Anwesenheit (= Auslenkung aus "Ruhelage $\phi = 0$").

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dot{\phi} & = & \frac{\delta H}{\delta\pi} & = & c^2\pi \\ \dot{\pi} & = & -\frac{\delta H}{\delta\phi} & = & \Delta\phi - \mu^2\phi \end{array}\right\} \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + \mu^2\phi = 0\,. \tag{7.50}$$

wie gehabt.

7.5 Ergänzung: Funktional und so

Funktional ist eine Abbildung $F : M \to \mathbb{R}$ worin M eine irgendwie interessierende Menge von Funktionen, meist über dem $\mathbb{R}^n$. Um anzudeuten, dass es sich bei F um ein Funktional (eine "Funktion von Funktionen") handelt, schreibt man $F[\phi]$ – also das Argument (die Funktion ϕ) in eine eckige Klammer.

Wichtige Begriffe sind

- *Funktionaldifferential*, notiert δF, erklärt via

$$F[\phi + \delta\phi] = F[\phi] + \delta F[\phi] + O(\delta\phi)^2 \tag{7.51}$$

  in Analogie zur Analysis $f(\xi + \Delta\xi) = f(\xi) + df(\xi) + O(\Delta\xi)^2$.

- *Funktionalableitung* erklärt via

$$\delta F[\phi] = \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) d^n x \tag{7.52}$$

  in Analogie zur Analysis $df(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} d\xi^i$.

Für Funktionale der Form

$$F[\phi] = \int_G \mathcal{F}(\phi(x), \partial_i \phi(x); x) d^n x \tag{7.53}$$

worin die Dichte $\mathcal{F}$ eine (meist algebraische) Funktion von $\phi(x)$, den ersten Ableitungen $\partial_i \phi(x)$, und möglicherweise externen Feldern $j(x)$ (die nicht variiert werden), gilt insbesondere

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi(x))} \tag{7.54}$$

für alle Funktionen ϕ im Definitionsbereich von F, die auf dem Rand ∂G den Wert Null annehmen.

Beweis:

$$\begin{aligned} F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi(x))} \partial_i \delta\phi(x) \right\} d^n x \quad (7.55) \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} - \sum_{i=1}^n \left(\partial_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi(x))} \right) \right\} \delta\phi(x) d^n x \\ &\quad + \int \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \phi(x))} \delta\phi(x) \right) d^n x \quad (7.56) \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann via Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral von (...) über ∂G umgeformt werden. Da nach Voraussetzung $\phi|_{\partial G} = 0$, und also insbesondere

$\delta\phi|_{\partial G} = 0$ (denn neben ϕ muss auch $\phi + \delta\phi$ im Definitionsbereich von F liegen), liefert das Oberflächenintegral keinen Beitrag. Vergleich von () mit () liefert dann den Satz ().

Sei beispielsweise

$$F[\phi] := \int j(x)\phi(x)d^n x \tag{7.57}$$

dann

$$F[\phi + \delta\phi] = \int j(x)\phi(x)d^n x + \int j(x)\delta\phi(x)d^n x \tag{7.58}$$

und also

$$\delta F = \int j(x)\delta\phi(x)d^n x \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = j(x) \tag{7.59}$$

Eine schöne Anwendung vermittelt das Funktional $F[\phi] = \int \delta^n(y-x)\phi(x)d^n x$. worin $\delta^n(y-x)$ die Delta-Funktion im n-dimensionalen Raum. Offenscithlich liefert F den Funktionswert von ϕ an der Stelle y, kurz $F[\phi] = \phi(y)$. Statt $\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x)$ schreibt man hier gerne

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x) \tag{7.60}$$

in Analogie zu $\frac{\partial\xi^j}{\partial\xi^i} = \delta^j{}_i$ (Kroneckerdelta) in der Analysis.