Kapitel 9

(Quanten-)Elektrodynamik

Quantenelektrodynamik ist Maxwell'sche Elektrodynamik bei der die Ladungs- und Stromdichte von geladenen Diracteilchen getragen wird, etwa Elektronen bzw. Positronen, oder Quarks und Antiquarks ...

9.1 W'hlg klassische Elektrodynamik

Der klassische Rahmen für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie, Sie erinnern sich, sind die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \varrho\,, && \textsc{Gauss}\\
\vec{\nabla}\times\vec{H}-\dot{\vec{D}} &= \vec{j}\,, && \textsc{Ampère-Maxwell}\\
\vec{\nabla}\times\vec{E}+\dot{\vec{B}} &= 0\,, && \textsc{Faraday}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0\,, && \textsc{No Name}\,,
\end{aligned} \tag{9.1}$$

wobei in der hier interessierenden mikroskopischen Theorie

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}\,, \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}\,, \tag{9.2}$$

mit ε_0 die *elektrische Permittivität* des Vakuums (Dielektrizitätskonstante), μ_0 die *magnetische Permeabilität*, und c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Die Maxwell-Gleichungen Gauss und Ampèr-Maxwell implizieren eine Bilanzgleichung

$$\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\,, \quad \text{bzw. in 4er Sprache} \quad \partial_\mu j^\mu = 0\,. \tag{9.3}$$

unter Eingeweihten genannte **Kontinuitätsgleichung**, Ausdruck der Ladungserhaltung in der Elektrodynamik.

Das elektromagnetische Feld $\vec{E}, \vec{B}$ lässt sich mittels skalarem Potential Φ und Vektorpotential $\vec{A}$ darstellen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, womit die homogenen Maxwellgleichungen Faraday und NoName automatisch befriedigt sind. Verbleiben die inhomogenen Maxwellgleichungen Gauss und Ampére-Maxwell. Unschwer weist man nach, dass sie die Euler-Lagrange-Gleichungen zu einer Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M'wll}}(A, \partial A; j) = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu\,, \tag{9.4}$$

wo $(j^\mu) = (c\varrho, \vec{j})$ die 4er-Stromdichte, $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$ das 4er-Potential, und $(F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ der Faradaytensor.[1] Bei der Variation zu beachten ist, dass in Bezug auf die Maxwell-Gleichungen die 4er-Stromdichte (j^μ) eine vorgegebenes Feld, das nicht zu variieren ist.

[1] Ausgedrückt in in Laborfeldern

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M'wll}} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\Phi\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} - \varrho\Phi \equiv \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} - \varrho\Phi\,. \tag{9.5}$$

Die Lagrangedichte (9.4) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, $\mathcal{L}_{\mathrm{M'wll}} = \mathcal{L}_{\mathrm{rad}} + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}$. Der Anteil

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}(A, \partial A) = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{9.6}$$

beschreibt das elektromagnetisch Strahlungsfeld im Vakuum, d.h. in Raumregionen wo $(j^\mu) = (0)$. Der Anteil

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(A; j) = -j_\mu A^\mu \tag{9.7}$$

beschreibt die Kopplung der Quellen j^μ an die Potentialfunktion A^μ des Feldes.

Das physikalische Feld $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ ist invariant unter Transformationen der Potentialfunktion $\Phi \mapsto \Phi' = \Phi + \dot{\chi}$, $\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi$ mit χ beliebige reellwertige Funktion. In 4er-Sprache schreibt sich eine derartige **Eichtransformation** `[Ich muss dringend mal die Vorzeichenkonvention in meinen Skripten vereinheitlichen ...]`

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)\,. \tag{9.8}$$

Die Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes, $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ gem. Gl. (9.6), ist eichinvariant. Der Kopplungsterm $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$, Gl. (9.7), fängt sich unter (9.8) zwar einen Zusatzterm $-j_\mu \partial^\mu \chi = -j^\mu \partial_\mu \chi$ ein, der ist aber angesichts $j_\mu \partial^\mu \chi = \partial^\mu (j_\mu \chi) - (\partial^\mu j_\mu)\chi$, mit Blick auf die 4er-Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu = 0$, dynamisch irrelevant – schließlich trägt die 4er-Divergenz $\partial^\mu(j_\mu \chi)$ zu den Euler-Lagrange-Gleichungen nicht bei.[2] Eichinvarianz der Elektrodynsmik ist auf engste verknüpft mit der "Masselosigkeit" des Strahlungfeldes – jeglicher "massive" Zusatzterm $\propto A_\mu A^\mu$ zu (9.4) würde die Eichinvarianz verletzen und wäre nicht verträglich mit den Maxellgleichungen.

Die Maxwell-Gleichungen liefern kein dynamisches Modell für die zeitliche Entwicklung der Ladungs- und Stromdichte. Bewährt hat sich die Annahme, dass Ladungs-

[2] Sehr wohl aber zur Wirkung (wegen Fluss durch die räumlichen Hyperflächen bei t_a und t_b). In der Quantenelektrodynamik besteht man auf Invarianz der Wirkung, was durch die kovarianten Ableitungen allerdings garantiert ist – vgl. weiter unten.

und Stromdichte von Punktladungen getrage werden

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_a(t))\,, \qquad \vec{j}(\vec{x},t) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_a(t))\,. \tag{9.9}$$

wobei dem Experiment entnommen wird, dass die Bewegung der Punktladungen den **Netwon-Lorentzgleichungen**,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_a \vec{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_a(t)^2}{c^2}}}\right) = q_a \left[\vec{E}(\vec{r}_a(t),t) + \vec{v}_a(t) \times \vec{B}(\vec{r}_a(t),t)\right] \tag{9.10}$$

genügen. Postuliert wird, dass sowohl die Ruhemassen m_a als auch die Ladungen q_a intrinsische, d.h. zeitunabhängige Eigenschaften der beteiligten Teilchen. Für die Dichten (9.9) ist somit Ladungserhaltung (9.3) automatisch garantiert.

Die Maxwell-Gleichungen im Verbund mit den Newton-Lorentzgleichungen liefern das **Standard-Modell** der klassischen Physik: in den Maxwell-Gleichungen (9.1) sagt die Materie, wie Feld entsteht und sich bewegt, in den Newton-Lorentzgleichungen (9.10) sagt das Feld wie die Materie sich bewegt.

Die Lagrangefunktion des klassischen Standard-Modells – ihre **Weltformel** – erhält man nun einfach, indem man die Lagrangefunktionen des freien Strahlungfeldes $L_{\text{rad}} = \int \mathcal{L}_{\text{rad}} d^3x$, die Lagrangefunktion freier Punktteilchen,

$$L_{\text{mat}}[\vec{r},\dot{\vec{r}}] = -\sum_\alpha m_\alpha c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\alpha^2}{c^2}} \tag{9.11}$$

und die Lagrangfunktion der Wechsewirkung $L_{\text{int}} = -\int j_\mu A^\mu d^3x$ addiert,

$$L = L_{\text{rad}} + L_{\text{mat}} + L_{\text{int}} \tag{9.12}$$

Wie Sie mittlerweile wissen hat die Weltformel der klassischen Physik nicht lange überlebt: beispielsweise impliziert sie einen "Strahlungskollaps" was nun allerdings unserer anhaltenden Existenz eklatant widerspricht. Zur Rettung kam hier Anfang des 20. Jahrhunderts die Quantenmechanik, bei der zunächst die Materie quantisiert wurde, und schließlich auch das elektromagnetische Feld. Auch wurden neue, bis dato unbekannte, Wechselwirkungmechanismen – bzw. "Strahlungsfelder" – entdeckt, denken Sie nur an die Kernkäfte, den β-Zerfall, oder den Higgs-Mechanismus der für die Geburt von "Masse" verantwortlich ist.

Überaus bemerkenswert, dass sich die Grundprinzipien des klassichen Standardmodells auch bei der theoretischen Modellierung all dieser neuen und überraschenden Phänomene bewährt haben: es gibt zwei Typen von Existenzen – Ding (Lepton, Quark) und Medium (elektroschwaches Feld, Gluonfeld). Die über weite Entfernungen zu beobachtende Wechselwirkung von Dingen wird durch Ding-lokale(!) Anregungen der Medien bewirkt: in der Kopplung $j_\mu(\vec{x},t)A^\mu(\vec{x},t)$ beeinflusst die Stromdichte $j^\mu(\vec{x},t)$ von Ding hier $\vec{x}$ und jetzt t das Feld A^μ von Medium hier und jetzt. Die Anregungen von Medium propagieren dann von "hier und jetzt" nach "dort $\vec{x}$ und später $t' > t$" um via $j_\mu(\vec{x}',t')A^\mu(\vec{x}',t)$ wiederum die Dinge dort und später zu beeinflussen. Die **ontologische Dichotomie** von "Ding" und "Medium", gepaart mit einem **Lokalitätsprinzip** (die lokale Kopplung von Ding an Medium – und *nicht* Ding an Ding), der in der Dreifaltigkeit (9.12) seinen Ausdruck findet, hat alle Revolutionen des 20. Jahrhunderts bis hin zum Jahr 2016 unbeschadet überlebt ...

9.2 Quantisierung des freien Strahlungsfeldes

Das "kanonische Programm" sieht sich mit dem Problem konfrontiert, dass L_{rad} unabhängig von der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{A}^0$, daher der zu A^0 kanonisch konjugierten Impuls gleich Null, $\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0$. Daher ist $A^0 = \Phi/c$ kein dynamischer

Freiheitsgrad, sondern vielmehr durch Materiekonfiguration (Ladungsdichte Stromdichte) bereits bestimmt. Verbleibt als Freiheitsgrad ein Vektorfeld $\vec{A}$, alllerdings masselos wegen Eichinvarianz. Eichfreiheit betrifft die longitudinale Komponente von $\vec{A}$ (Fourierdenke: $\vec{\nabla}\chi$ ist $\propto \vec{k}$, daher longitudinales Vektorfeld, d.h. Vektorfeld in Propagations-Richtung). Verbleiben als dynamische Freiheitsgrade nur zwei transversale Komponenten bzw Helizitäten.

Im Schema *Elektrodynamik in Coulombeichung* werden die nicht-dynamischen Freiheitsgrade aus der Lagrangedichte eliminert indem man einerseits die **Coulombeichung** wählt, $\mathrm{div}\vec{A} = 0$, und andererseits das skalare Potential A^0 als Funktional der Ladungsdichte ausdrückt. Die sich dann ergebende Lagrangedichte ist frei von Pathologien und kann nach dem kanonischen Schema quantisiert werden. Das Verfahren ist insbesondere in "labornahen" Anwendungen beliebt, kommt aber für grundsätzliche Überlegungen etwas unbeholfen daher, da die Coulombeichung nicht Lorentzinvariant.

Im Schema *Elektrodynamik in Lorenzeichung* wird das klassische 4er Potential A^μ durch die **Lorenzeichung**[3]

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{9.13}$$

eingeschränkt. Als residuale Eichfreiheit verbleibt dann $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$, wobei χ der Wellengleichung $\Box\chi = 0$ zu genügen hat. Statt der Standard-Lagrangedichte (9.6) darf die **Fermi-Lagrangedichte**

$$\mathcal{L}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{rad}} = -\epsilon_0 \frac{c^2}{2} \left(\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial^\mu A^\nu\right) \tag{9.14}$$

dienen.[4] Euler-Lagrange-Gleichungen zu () lauten schlicht

$$\Box A^\mu = 0\,, \tag{9.15}$$

[3] Ludvig Lorenz, nicht Hendrik Antoon Lorentz!

[4] Standard und Fermi unterscheiden sich: $\mathcal{L}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{rad}} = \mathcal{L}_{\mathrm{rad}} - \epsilon_0 \frac{c^2}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 +$

wie für homogene M'wll in Lorenzeichung nicht anders zu erwarten.

Da $\mathcal{L}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{rad}}$ nun vom Typ "masselose Klein-Gordontheorie" steht dem kanonischen Programm nichts mehr im Wege, unter Eingeweihten genannt **Gupta-Bleuler**-Quantisierung. Die zu A^μ kanonisch konjugierten Impulsfelder $\pi^\mu \equiv \frac{\delta L^{\mathrm{F}}_{\mathrm{rad}}}{\delta \dot{A}^\mu}$ ergeben sich zu $\pi^0 = -\epsilon_0 \dot{A}^0$, $\pi^i = \epsilon_0 \dot{A}^i$, $i = 1, 2, 3$. Die Poissonklammern sind schnell notiert, Quantisierung folgt auf dem Fuße

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \dot{\hat{A}}^\nu(\vec{x}', t)\right] = -i\frac{\hbar}{\epsilon_0}\eta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\,, \tag{9.16}$$

alle anderen Kommutatoren gleich Null. Man beachte, dass mit der hier gewählten Konvention der Minkowskimetrik $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ die Kommutatoren der räumlilchen Komponenten $\hat{A}^i$, $i = 1, 2, 3$ durchaus mit dem vertrauten Vorzeichen auf der rechten Seite versehen sind; lediglich der Kommutator der zeitliche Komponente $\hat{A}^0$ kommt wegen $\pi^0 \propto -\dot{A}^0$ mit einem ungewöhnlichen Minus (so als ob Impuls und Geschwindigkeit wegen "negativer Masse" in entgegengesetzen Richtungen weisen).

Auf den gewohnten Pfaden werden Lösungen der freien Theorie (9.15) nach ebenen Wellen entwickelt,

$$\hat{A}^\mu(x) = \hat{A}^{\mu+}(x) + \hat{A}^{\mu-}(x) \tag{9.17}$$

mit

$$\hat{A}^{\mu+}(x) = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V\omega(\vec{k})}}\,\varepsilon^\mu_\alpha(\vec{k})\hat{a}_\alpha(\vec{k})e^{-ikx}\,, \tag{9.18}$$

und $\hat{A}^{\mu-} = (\hat{A}^{\mu+})^\dagger$, denn A reell. Hier steht kx kurz für $k_\mu x^\mu$ und die $\vec{k}$-Summe erstreckt sich hier über alle, mit den periodischen Randbedingungen verträglichen,

$\epsilon_0 \frac{c^2}{2}\partial_\mu\left(A^\mu\partial_\nu A^\nu - A^\nu\partial_\nu A^\mu\right)$. Die 4er Divegenz ist dynamisch irrelevant, der Zusatztzerm $(\partial_\mu A^\mu)^2$ wird in Lorenzeichung auf den Wert Null verpfichtet.

Wellenvektoren $\vec{k}$ und $k^0 = \frac{1}{c}\omega(\vec{k}) = |\vec{k}|$. Die Normierungskonsten wurde im vorauseilenden Gehorsam so gewählt, dass die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die vertrauten Bedeutung von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aufweisen – vgl. Gl. (9.22) weiter unten.

Die ε_α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ sind 4 Basisvektoren im Minkowskiraum. Mit der Kurzschreibweise $A \cdot B = A_\mu B^\mu$ für das (indefinite) Skalarprodukt im Minkowskiraum, wählen wir sie reell und im folgenden Sinne "orthonormal" und vollständig,

$$\varepsilon_\alpha(\vec{k}) \cdot \varepsilon_\beta(\vec{k}) = -\eta_{\alpha\beta}\,, \qquad \varepsilon_0^\mu(\vec{k})\varepsilon_0^\nu(\vec{k}) - \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^\mu(\vec{k})\varepsilon_i^\nu(\vec{k}) = \eta^{\mu\nu}\,. \tag{9.19}$$

Das merkwürdige Minuszeichen in der ersten Gleichung ist Konvention; mir ihm erhalten raumartige Polaristationsvektoren die vertraute Euklidische Bedeutung.[5] Um etwas vor Augen zu haben

$$\varepsilon_0(\vec{k}) = (1, 0, 0, 0)\,, \qquad \varepsilon_i(\vec{k}) = (0, \vec{\varepsilon}_i(\vec{k}))\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{9.20}$$

wo $\vec{\varepsilon}_i$ paarweise orthogonal mit

$$\vec{\varepsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\varepsilon}_2(\vec{k}) = \vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\,. \tag{9.21}$$

Anregungen des Strahlungsfeldes mit Polarisation $\vec{\varepsilon}_{1,2}$ definieren **transversale** Photonen, Anregungen mit Polarisation $\vec{\varepsilon}_0$ die sog. **skalaren** Photonen, Anregungen mit Polarisation $\vec{\varepsilon}_3$ die sog. **longitudinale** Photonen. Longitudinale (und skalare) Photonen sind der Laborphysik fremd. Als "freie" Teilchen treten sie auch nie in Erscheinung ...

[5] Noch ein Grund, sich der ART-Konvention $\eta^{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ anzuschließen ...

Die Poissonklammern implizieren Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_\alpha(\vec{k}), \hat{a}^\dagger_\beta(\vec{k}')\right] = -\eta_{\alpha\beta}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,, \qquad \left[\hat{a}_\alpha(\vec{k}), \hat{a}_\beta(\vec{k}')\right] = \left[\hat{a}^\dagger_\alpha(\vec{k}), \hat{a}^\dagger_\beta(\vec{k}')\right] = 0\,. \tag{9.22}$$

Mit Blick auf die Signatur $(\eta_{\alpha\beta}) = (+1, -1, -1, -1)$ sind das für $\alpha = 1, 2, 3$ die Standard Bose Vertauschungrelationen. Sorgen machen die Vertauschungrelationen für die skalaren Photonen. Beispielsweise hätte der "ein-Skalarphoton-Zustand" $|1_0(\vec{k})\rangle = \hat{a}^\dagger_0(\vec{k})|0\rangle$ angesichts $\langle 1_0(\vec{k})|1_0(\vec{k})\rangle = -1$ eine "negative Norm" – in einem gewöhnlichen Hilbertraum ein Ding der Unmöglichkeit. Glücklicherweise werden derartige Zustände in physikalischen Prozessen nicht erzeugt. Physikalische Zustände lassen sich vielmehr charakterisieren $\langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu|\Psi\rangle = 0$, äquivalent

$$\left[\hat{a}_3(\vec{k}) - \hat{a}_0(\vec{k})\right]|\Psi\rangle = 0\,, \tag{9.23}$$

d.h. in physikalischen Prozessen halten sich skalare und longitudinale Photonen die Waage. Infolgedessen ist insbesondere der Hamiltonoperator der Theorie

$$\hat{H}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{rad}} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k})\left(\hat{a}^\dagger_1(\vec{k})\hat{a}_1(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger_2(\vec{k})\hat{a}_2(\vec{k})\right) - \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k})\left(\hat{a}^\dagger_0(\vec{k})\hat{a}_0(\vec{k}) - \hat{a}^\dagger_3(\vec{k})\hat{a}_3(\vec{k})\right) \tag{9.24}$$

im Raum der physikalischen Zustände positiv-definit. Die Energie wird ausschließlich durch die transversalen Photonen bestimmt.

9.3 Quantisierung des freien Diracfeldes

Unschwer weist man nach, dass die Diracgleichung (5.9) und ihre konjugierte Schwester Euler-Lagrangegleichungen zur Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = c\bar{\Psi}\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right]\Psi \tag{9.25}$$

$$= \Psi^\dagger(x)\left[i\hbar\partial_t + i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - mc^2\right]\Psi\,. \tag{9.26}$$

wobei Variationen in Ψ und $\bar{\Psi}$ als unabhängig anzusehen sind: Variation $\delta\Psi^*$ liefert die Dirac-Gleichung (5.9), Variation $\delta\Psi$ liefert ihre adjungierte Schwester.

Kanonisch konjugierter Impulsfelder

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}(\vec{x},t)} = i\hbar\Psi^\dagger(\vec{x},t)\,, \qquad \bar{\pi}(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\bar{\Psi}}(\vec{x},t)} = 0\,. \tag{9.27}$$

die klassischen Poissonklammern

$$\frac{\hbar}{i}\left\{\Psi_a(\vec{x},t), \Psi_b^*(\vec{x}',t)\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,, \tag{9.28}$$

sowie Hamiltonfunktional des Dirac-Feldes

$$H_{\mathrm{D}}[\Psi,\Psi^\dagger] = \int \Psi^\dagger\left[c\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + mc^2\beta\right]\Psi d^3x\,. \tag{9.29}$$

Offensichtlich kann das Funktional(!) $H_{\mathrm{D}}[\Psi,\Psi^\dagger]$ als quantenmechanischer Erwartungswert des ein-Teilchen Hamiltonoperators H_{D} gelesen werden. Eine solche Deutung ist in der Klein-Gordon-Theorie nicht möglich.

Lagrange- und Hamiltonformalismus der Dirac-Theorie weisen Besonderheiten auf:

- Die Lagrangedichte (9.25) ist nicht reell. Die Lagrandgedichte $\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}+\mathcal{L}^*\right)$ ist reell, unterscheidet sich von (9.25) nur durch eine 4er Divergenz, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{i}{2}\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)$, d.h. $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ sind dynamisch äquivalent (geben Anlass zu den gleichen ELG).

- Die Felder ψ, $\dot{\psi}$, $\bar{\psi}$ und $\dot{\bar{\psi}}$ sind keine unabhängigen Variable. Der zu $\bar{\psi}$ kanonisch konjugierte Impuls ist Null, der zu ψ kanonisch konjugierte Impuls ist ein Konfigurationsvariable, und keine verallgemeinerte Geschwindigkeit. Der

Phasenraum ist nicht 4-dimensional, sondern nur 2-dimensional. In den Übungen wird gezeigt, wie damit umzugehen ist, und dass die Audsdrücke für das Hamitonfunktional und die Poissonklammern korrekt sind.

Für die Quantisierung der Dirac-Theorie lässt man sich am einfach von der zweiten Quantisierung der Schrödinger-Theorie leiten. Aus (9.29) wird der Dirac-Hamiltonian

$$\hat{H}_{\mathrm{D}} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}) \left[mc^2\beta + \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} \right] \hat{\Psi}(\vec{x})\,. \tag{9.30}$$

und aus dem klassischen Diracfeld Ψ wird das quantisierte Diracfeld $\hat{\Psi}$.

Der Feldoperator wird nach der Orthonormalbasis entwickelt,

$$\hat{\Psi} = \sum_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s}\mathsf{u}_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + \sum_{\vec{p},s} \tilde{c}_{\vec{p},s}\mathsf{v}_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \tag{9.31}$$

worin $\hat{c}$ Vernichtungsoperatoren für Elektronen zu positivem $\varepsilon = E(\vec{p})$, und $\tilde{c}$ Vernichtungsoperatoren für Elektronen zu negativem $\varepsilon = -E(\vec{p})$.

Gemäß Löchertheorie ist die Vernichtung eines $(\vec{p}, s)$-Elektrons zu negativem ε gleichbedeutend der Erzeugung eines $(-\vec{p}, -s)$-Positrons zu positivem ε. Daher

$$\tilde{c}_{\vec{p},s} = \hat{d}^\dagger_{-\vec{p},-s}\,, \qquad \tilde{c}^\dagger_{\vec{p},s} = \hat{d}_{-\vec{p},-s}\,. \tag{9.32}$$

wobei von nun an Operatoren $\hat{c}^\dagger$ bzw $\hat{c}$ Erzeuger bzw Vernichter von Elektronen, und $\hat{d}^\dagger$ bzw $\hat{d}$ Erzeuger und Vernichter von Positronen. Dabei ist zu beachten, dass Elektron und Positron Teilchen der gleichen Sorte "Diracteilchen". Ein Elektron ist ein Diracteilchen im Zustand "Ladung $-|e_0|$", ein Positron ist ein Diracteilchen im Zustand "Ladung $+|e_0|$".

Nach Umbenennung der Summationsvariablen in der zweiten Summe von Gl. (9.31)

$$\hat{\Psi} = \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s} \mathsf{u}_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^+} + \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \mathsf{v}_{-\vec{p},-s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^-} . \tag{9.33}$$

Im "positive Frequenzanteil" werden Elektronen vernichtet, im "negativen Frequenzanteil" werden Positronen erzeugt. Im adjungierte Feld

$$\hat{\Psi} = \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \mathsf{u}^\dagger_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^{\dagger -}} + \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s} \mathsf{v}^\dagger_{-\vec{p},-s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^{\dagger +}} \tag{9.34}$$

werden Elektronen im positiven Frequentanteil erzeugt, Positronen im negativen Frequenzanzteil vernichtet.

Einsetzen in (9.30), Ausführen der x-Integration, dabei die Orthonormalitätsrelationen der u und v beachten, erhält man

$$\hat{H}_\mathrm{D} = \sum_{\vec{p},s} E_\nu \hat{c}^\dagger_\nu \hat{c}_\nu + (-E_\nu) \hat{d}_{\vec{p},s} \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} , \qquad \text{(vorläufig)} . \tag{9.35}$$

Quantisierung mit Kommutatoren würde hier zu einem "negativen Energie-Desaster" führen. Statt dessen, in Übereinstimmung mit Pauli-Verbot, Quantisierunge mittels Antikommutatoren,

$$\left\{ \hat{c}_{\vec{p},s}, \hat{c}^\dagger_{\vec{p}',s'} \right\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} , \qquad \left\{ \hat{d}_{\vec{p},s}, \hat{d}^\dagger_{\vec{p}',s'} \right\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} , \tag{9.36}$$

und alle anderen Antikommutatoren gleich Null. übertragen auf Feldoperatoren

$$\left\{ \hat{\Psi}_a(\vec{x}), \hat{\Psi}_{a'}(\vec{x}') \right\} = \left\{ \hat{\Psi}^\dagger_a(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger_{a'}(\vec{x}') \right\} = 0 , \tag{9.37}$$

$$\left\{ \hat{\Psi}_a(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger_{a'}(\vec{x}') \right\} = \delta_{aa'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') . \tag{9.38}$$

Berücksichtigt man die Antikommutationsregeln im Hamiltonoperator (9.35) schaut man zunächst auf $\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p}) \left(\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s} \right)$ mit $E_{\text{vac}} = -\sum_{\vec{p},s} E(\vec{p})$ die Nullpunktsenergie, im Sinne der Dirac'schen Löchertheorie interpretiert als Energie des Diracsees. Die Nullpunktsenergie ist zwar "Minus-Unendlich", aber als Konstante darf sie getrost unter den Tisch fallen. Definiert man an dieser Stelle die **Normalordnung**, wonach alle Vernichter in einem Operatorprodukt rechts von allen Erzeugern geschrieben, wobei jede Vertauschung der Original-Reihenfolge einen Faktor (-1) impliziert, erscheint die normalgeordnete Version von (9.35)

$$\hat{H}_{\text{D}} = \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p}) \left(\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s} \right) \tag{9.39}$$

also ohne Nullpunktsenergie. Operatoren der Form $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s}$ und $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s}$ sind **Anzahloperatoren**. Ihre (fermionischen!) Eigenwerte $0, 1$ geben Auskunft, ob eine $(\vec{p}, s)$-Mode mit einem Elektron oder einem Positron besetzt bzw unbesetzt ist.

Die Normalordnungsvorschrift für Fermionen, notiert $:\cdots:$, sei noch einmal an einem einfachen Beispiel illustriert

$$:\Psi_a \Psi_b: = :(\Psi^+_a + \Psi^-_a)(\Psi^+_b + \Psi^-_b): = \Psi^+_a \Psi^+_b - \Psi^-_b \Psi^+_a + \Psi^-_a \Psi^+_b + \Psi^-_a \Psi^-_b \tag{9.40}$$

Als weitere Anwendung die Gesamtladung des Diracfeldes, $\hat{Q} = q \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} d^3x$. Unter Verwendung der Modenentwicklung (9.33) bzw (9.34), in Besinnung auf die Antikommutationsregeln (9.36), und nach Anwendung der Normalordnung

$$\hat{Q} = q \sum_{\vec{p},s} \hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s} - \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s} \,, \tag{9.41}$$

also bestimmt durch die Differenz der Gesamtanzahl von Teilchen (Elektronen) und Antiteilchen (Positronen). Ohne Anwendung der Normalordnungsvorschrift träte hier noch eine unendliche Konstante $Q_{\text{vac}} = q \sum_{\vec{p},s}$ auf – die Gesamtladung des Diracsees der Teilchen.

9.4 QED

Die vollständige Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik besteht aus der bereits bekannten Dreifaltigkeit "rad + mat + int". Mit Diracteilchen als Repräsentanten der Materie

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + c\bar{\Psi} \left[i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc \right] \Psi \tag{9.42}$$

wo

$$j^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{9.43}$$

die elektrische 4er Stromdichte des Diracfeldes. Die elektrische Ladungskonstante q ist charakteristisch für das Diracfeld. Für Elektron, Müon und Tau $q = -|e_0|$, für Neutrinos $q = 0$, für up-, charm- und top-Quarks $q = 2|e_0|/3$, während für down-strange- und bottom-Quarks $q = -|e_0|/3$.

Euler-Lagrange-Gleichungen sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (9.1), in Lorenzeichung

$$\Box A^\mu = j^\mu \,, \tag{9.44}$$

und die Diracgleichung

$$\left[i\hbar c\gamma^\mu D_\mu - mc^2 \right] \Psi = 0 \,, \tag{9.45}$$

mit D_μ die vertraute kovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar} A_\mu \,. \tag{9.46}$$

Bekanntlich ist das elektromagnetische Feld invariant unter Eichtransformationen des 4er Potentials (9.8). Ergänzt um eine lokale Phasentransformation

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-i\frac{q}{\hbar}\chi(x)} \Psi(x) \tag{9.47}$$

erweist sich $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ als invariant unter der Kombination (9.8,9.47).

Die so eingeführten Transformationen bilden eine Gruppe – die **Eichgruppe** der elektromagnetischen Wechselwirkung. Weil der 4er Gradient (9.8) linear, ist die Gruppe Abelsch. Und weil sie für Diracspinoren die Multiplikation mit einem komplexen Phasenfaktor bedeutet, und Multiplikation mit komplexen Phasenfaktoren die Gruppenverknüpfung der $U(1)$, sagt man, die Eichgruppe der elektromagnetischen Wechselwirkung sei die (lokalisierte) $U(1)$.

Im kanonischen Schema ist der Hamiltonoperator der QED

$$\hat{H}_{\mathrm{QED}} = \hat{H}_{\mathrm{rad}} + \hat{H}_{\mathrm{D}} + \hat{H}_{\mathrm{int}} \tag{9.48}$$

wo $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ die Energie der Wechselwirkung von Strahlungsfeldes und Diracfeld beschreibt,

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \int \underbrace{q : \bar{\hat{\Psi}} \gamma_\mu \hat{\Psi} \hat{A}^\mu :}_{:=\mathcal{H}_{\mathrm{int}}} d^3x \,. \tag{9.49}$$

mit $:\cdots:$ die Normalordnungsvorschrift.

Die hier eingeführte Energiedichte $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ definiert die elementaren Prozesse der Theorie.

Ruft man sich die Entwicklung nach ebenen Wellen in Erinnerung, stellt man unschwer fest, dass Dank x-Integration von $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ die Summe der einlaufenden Impulse in einem elementaren Vertex gleich der Summe der auslaufenden Impulse.

Da eine exakte Lösung der QED unmöglich erscheint, empfiehlt sich die Analyse im Rahmen einer Störungstheorie, d.h. Entwicklung nach Potenzen in $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ ...

`[Hier jetzt W'hlg Störungstheorie im Wechselwirkungsbild, `S`-Matrix, gefolgt von Wick'sches Theorem, und Berechnung einfacher Prozesse in niedrigster Ordnung Störungstheorie ...]`