Kapitel 11

QCD

Quarks sind Diracteilchen. Sie kommen in sechs Flavours (Geschmacksrichtungen) f=u,d,s,c,t,b mit jeweils unterschiedlichen Massen. Neben elektrischer Ladung tragen sie Farbladung r (red), g (green), und b (blue). Mit der Farbladung koppeln sie an das Gluonenfeld. Gluonen sind die Mediatoren der starken Wechselwirkung.

In der QCD wird jede Geschmacksrichtung f durch ein Farb-Triplett beschrieben, das up beispielsweise

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{r}} \\ u_{\mathrm{g}} \\ u_{\mathrm{b}} \end{pmatrix} . \tag{11.1}$$

wo $u_{\mathrm{r}}, u_{\mathrm{g}}, u_{\mathrm{b}}$ vier-komponentige Diracspinoren.

Ein Quark-Triplett transformiert unter einer lokalen $SU(3)$ Trafo

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q} \tag{11.2}$$

wo $\mathbf{U}$ ein beliebiges raum- und zeitabhängiges Element der $SU(3)$.

Die Quarks koppeln an ein Eichfeld ($\mathbf{G}_\mu$), das nun allerdings 3×3-Matrixwertig. Die Kopplung erfolgt wie in der QED, indem in der freien Lagrangedichte die partielle Ableitung ∂_μ durch eine ($SU(3)$-) kovariante Ableitung ersetzt wird,

$$D_\mu \mathbf{q} := (\partial + ig\mathbf{G}_\mu)\mathbf{q} \tag{11.3}$$

wo g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung.

Die Forderung, dass sich das Feld(!) $D_\mu \mathbf{q}$ unter einer lokalen $SU(3)$-Trafo wie das Feld $\mathbf{q}$ transformiert,

$$D_\mu \mathbf{q} \mapsto (D_\mu \mathbf{q})' = \mathbf{U} D_\mu \mathbf{q} \tag{11.4}$$

impliziert das Transformationsgesetz

$$\mathbf{G}_\mu \to \mathbf{G}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{G}_\mu\mathbf{U}^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\,. \tag{11.5}$$

Beweis:

$$(D_\mu \mathbf{q})' \equiv D'_\mu \mathbf{q}' = D'_\mu \mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{U}(\mathbf{U}^\dagger D'_\mu \mathbf{U})\mathbf{q} \tag{11.6}$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu = \mathbf{U}^\dagger D'_\mu \mathbf{U} \tag{11.7}$$

$$\text{bzw} \quad D'_\mu = \mathbf{U} D_\mu \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\partial_\mu \mathbf{U}^\dagger + ig\mathbf{U}\mathbf{G}_\mu\mathbf{U}^\dagger = \partial_\mu + ig\left[\mathbf{U}\mathbf{G}_\mu\mathbf{U}^\dagger - \frac{i}{g}\mathbf{U}(\partial_\mu \mathbf{U}^\dagger)\right] \tag{11.8}$$

Jedes Element $\mathbf{U}$ der $SU(3)$ kann dargestellt werden $\mathbf{U} = \exp(-i\mathbf{H})$ mit $\mathbf{H}$ Hermitsche 3×3-Matrix, spurfrei um $\det(\mathrm{U}) = 1$ zu garantieren. Der Vektorraum derartiger Matrizen ist dann 8-dimensional (nicht 9-dimensional!), und kann als Linearkombination der 8 Gell-Mann Matrizen λ_i, $i = 1, \ldots, 8$ geschrieben werden.

Entsprechend darf $\mathbf{G}_\mu$ Hermitesch und Spurfrei angenommen werden und kann nach den Gell-Mann Matrizen entwickelt werden

$$\mathbf{G}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu \lambda_{\mathbf{a}} \tag{11.9}$$

worin die Koeffizienten $G^a_\mu \equiv G^a_\mu(x)$ acht reelle 4er Felder (μ ist 4er Index) genannt die **Gluonenfelder**.

Der Feldstärken-Tensor

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu + ig(\mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\mu) \tag{11.10}$$

transformiert unter $SU(3)$ gemäß

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} \mapsto \mathbf{G}'_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger \,. \tag{11.11}$$

`[Muss noch ausgebaut weden ...]`