Noethers Theorem

Mathematische Bissen zu Kursvorlesungen der theoretischen Physik

Martin Wilkens, Universität Potsdam

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße lässt sich ein von Emmy Noether[1] im Jahr 1918 formuliertes Theorem in wenigen Worten zusammenfassen, das den "Symmetry-Turn" der Physik des 20 Jahrhunderts einläutete und dessen Nachhall bis heute nicht verklungen ist – man denke etwa an die moderne Elementarteilchenphysik, die ohne Noether-Theorem schlicht nicht vorstellbar ist. Zeit also, das Theorem und seine Anwendungen kurz vorzustellen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Kontext der klassischen Punktmechanik beschränken werden.

Man erinnert sich – in der klassischen Mechanik kann in vielen Fällen die Dynamik eines Systems von n Freiheitsgraden mittels sog. **Euler-Lagrange Gleichungen** (ELG) beschrieben werden,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

wobei die sog. **Lagrangefunktion** $L = L(q, \dot{q}, t)$ eine Funktion der (verallgemeinerten) Koordinaten $q = (q^1, \ldots, q^n)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q} = (\dot{q}^1 \ldots, \dot{q}^n)$. Für ein Punktteilchen der Masse m in einer Raumdimension (also $n = 1$), beispielsweise, $L(q, \dot{q}) = T - V$, mit $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ die kinetische Energie, und $V = V(q)$ die Potentielle Energie.

Lagrangefunktionen L und L', die sich nur um eine **totale Zeitableitung** unterscheiden,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\chi(q, t)\,, \tag{2}$$

sind **dynamisch äquivalent**, soll heißen sie geben Anlass zu den gleichen Bewegungsgleichungen,[2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{3}$$

Man sagt dann, L und L' unterscheiden sich nur durch eine **Eichung** – ein Begriff, der seine Wurzeln in der Elektrodynamik hat.

1 Kovarianz der Euler-Lagrange Ableitung

Da Koordinaten nicht absolut gegeben, sondern vielmehr nach Gesichtspunkten der Zweckmäßigkeit gewählt werden, erhebt sich die Frage, welche Form die Gl. (1) annehmen, wenn statt Koordinaten q andere Koordinaten Q benutzt werden. Schick formuliert: wie sich die Euler-Lagrange Ableitung $\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ unter einem Kartenwechsel transformiert.

Wählt man also neue Koordinaten Q^i, verknüpft mit alten Koordinaten q^i via umkehrbar eindeutiger und differenzierbarer Abbildung

$$q^i = \Phi^i(Q, t)\,, \tag{4}$$

umgangssprachlich $q = q(Q,t)$, induziert diese sog *Punkttransformation* zunächst eine Transformation der Geschwindigkeiten

$$\dot{q}^i = \sum_j \frac{\partial \Phi^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j + \frac{\partial}{\partial t}\Phi^i(Q,t)\,, \tag{5}$$

non-chalant auch geschrieben $\dot{q} = \dot{q}(Q,\dot{Q},t)$. Gleichungen (4) und (5) definieren eine Abbildung $T_\Phi : (Q,\dot{Q},t) \mapsto (q,\dot{q},t)$, die *Tangentialabbildung* auf dem Raum der Koordinaten und (verallgemeinerten) Geschwindigkeiten.[3]

Die Punkttransformation Φ, und also die Tangentialabbildung T_Φ, induzieren nun auf natürliche Weise eine Transformation der Lagrangefunktion,

$$L \mapsto \bar{L} := L \circ T_\Phi\,, \tag{6}$$

bzw umgangssprachlich $\bar{L}(Q,\dot{Q},t) = L(q(Q),\dot{q}(Q,\dot{Q},t),t)$.[4] Die Prädikat "natürlich" erschließt sich aus dem

Theorem (Kovarianz der Euler-Lagrange Ableitung) Unter Punkttrafo Φ mit Tangentialabbildung T_Φ sind die Euler-Lagrange Gleichungen forminvariant[5]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^i} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q^i} = 0\,. \tag{7}$$

Der Beweis ist elementar und involviert lediglich die Kettenregel (KR) und Produktregel (PR) der Differentialrechnung. Mit der etwas non-chalanten Schreibweise $q = q(Q,t)$ (statt des pedantischen $q = \Phi(Q,t)$), erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q^j} \overset{\text{KR}}{=} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial Q^j}\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^j} \overset{\text{KR}}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{Q}^j} \overset{\text{Gl.(5)}}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \tag{9}$$

und daher

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^j} \overset{\text{PR}}{=} \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\right)\right]\,. \tag{10}$$

Angesichts

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \overset{\text{KR}}{=} \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^j \partial Q^k}\dot{Q}^k + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi^i}{\partial Q^j} \overset{\text{Gl.(5)}}{=} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial Q^j} \tag{11}$$

alsdann (wir kehren wieder zur pedantischen Schreibweise zurück)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q^j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right]\frac{\partial \Phi^i}{\partial Q^j}\,. \tag{12}$$

Abzulesen hier Gl. (7) mit Implikation "von links nach rechts". Da die Tangentialabbildung definitionsgemäß invertierbar, kann das Argument mit $\Phi \to \Phi^{-1}$ wiederholt werden, womit Gl. (7) dann auch mit Implikation "von rechts nach links" bewiesen wäre.

Ist $q(t)$ Lösung der Euler-Lagrangegleichungen für eine Lagrangefunktion L, so ist $Q(t) = \Phi^{-1} \circ q(t)$ Lösung der Euler-Lagrangegleichungen zur transformierten Lagrangefunktion $\bar{L}$ und vice versa. Im Allgemeinen scheint damit nicht viel gewonnen, schließlich müssen in jedem Fall DGL gelöst werden. Allerdings kann die Lösung der DGL durch geschickte Wahl der Koordinaten gehörig vereinfacht werden. Beim Keplerproblem haben Sie Gebrauch davon gemacht, als Sie die Lagrangefunktion zunächst von kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten (oder Zylinderkoordinaten) umgeschrieben haben und die resultierenden ELG anschließend durch Quadratur (also Integration) gelöst haben.

2 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Von besonderem Interesse sind Punkttransformationen Φ die die Lagrangefunktion invariant lassen bzw unter denen sich die transformierte Lagrangefunktion $\bar{L}$ nur durch eine totale Zeitableitung von der untransformierten Lagrangefunktion L unterscheidet,

$$L \circ T_{\Phi}^{-1} = L + \frac{d\chi}{dt}\,, \tag{13}$$

umgangssprachlich $L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\chi(q, t)$. Solche Φ heißen *Symmetrietransformationen*. Symmetrietransformationen bilden eine Gruppe, die sog *Symmetriegruppe* des Systems bzw seiner Lagrangefunktion.

Für Symmetrietransformationen gilt offensichtlich: ist $q(t)$ Lösung der Euler-Lagrangegleichungen mit Lagrangefunktion L, dann ist auch $Q(t) = \Phi^{-1}(q(t), t)$ eine Lösung! Die Funktionen $Q(t)$ und $q(t)$ mögen völlig verschieden sein – aber sie genügen den gleichen Differentialgleichungen. Sie beschreiben verschiedene Bahnen ein- und desselben mechanischen Systems!

Elementares Beispiel einer Symmetrietransformation ist die Spiegelung $\Phi(Q, t) := -Q$, also $q(Q) = -Q$ bzw invertiert $Q(q) = -q$ beim harmonischen Oszillator $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2$. Offensichtlich ist L invariant unter Spiegelungen, $L(Q, \dot{Q}) = L(q, \dot{q})$, mit $q(t)$ Lösung der Euler-Lagrange Gleichung ist also auch $Q(t) = -q(t)$ eine Lösung. Elementares Gegenbeispiel vermittelt das Teilchen im konstanten Kraftfeld, $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mgq$, mit g eine Konstante. Hier ist L nicht invariant unter Spiegelung, und also $Q(t) = -q(t)$ keine Lösung der ELG!

Neben den diskreten Symmetrien, die vornehmlich in Molekülen und Kristallen anzutreffen sind, spielen kontinuierliche Symmetrietransformationen eine hervorragende Rolle. Bei einer kontinuierlichen Trafo $\Phi : Q \mapsto q$ hängt Φ von einem reellwertigen Paramter ϵ stetig ab, wobei für $\epsilon = 0$ die Identität $\Phi_{\epsilon=0} = \mathrm{id}$, und für kleine ϵ (an dieser Stelle erweist sich die inverse Punkttransformation als bequemer)

$$\Phi_{\epsilon}^{-1} : q \mapsto Q_{\epsilon}^{i} = q^{i} + \epsilon\eta^{i}(q, t) + O(\epsilon^2)\,, \qquad \eta^{i}(q, t) = \frac{\partial}{\partial\epsilon} Q_{\epsilon}^{i}\Big|_{\epsilon=0}\,. \tag{14}$$

Die hier durch die Funktionen η^i charakterisierte Transformation ist eine Symmetrietransformation genau dann wenn die Lagrangefunktion des Systems der Gl. (13) genügt, umgangssprachlich formuliert

$$L(Q_{\epsilon}, \dot{Q}_{\epsilon}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\chi_{\epsilon}}{dt}\,, \tag{15}$$

bzw differentiell

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}L(Q_\epsilon,\dot{Q}_\epsilon,t)\Big|_{\epsilon=0}=\frac{d\Gamma}{dt}\,,\qquad \Gamma=\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \tag{16}$$

Angesichts

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}L(Q_\epsilon,\dot{Q}_\epsilon,t)\Big|_{\epsilon=0} = \sum\frac{\partial L}{\partial q^i}\eta^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\dot{\eta}^i \tag{17}$$

$$= \sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right]\eta^i+\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i \tag{18}$$

und in Erinnerung, dass für wahre Bahnen $\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}=0$, also

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i-\Gamma\right]=0\,. \tag{19}$$

Zusammengefasst:

Theorem (Noether) Sei Φ_ϵ einparametrige Schar (ϵ-Schar) von Symmetrietransformationen, also $\Phi_{\epsilon=0}=\mathrm{id}$ und

$$L\circ T^{-1}_{\Phi_\epsilon}=L+\frac{d\chi_\epsilon}{dt}\,. \tag{20}$$

sowie $\eta^i(q,t),\Gamma(q,t)$ gemäß Gl. (14) bzw (16). Dann ist

$$F:=\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i-\Gamma \tag{21}$$

ein erstes Inegral der Bewegung, $\frac{d}{dt}F=0$.

Der hier gefundene Zusammenhang zwischen Symmetrietransformationen und Erhaltungsgrößen ist von eminenter Bedeutung für die gesamte Physik, insbesondere Elementarteilchenphysik und Relativitätstheorie.

3 Die zehn Erhaltungssätze

Wir betrachten ein **abgeschlossenes System** von N Punktteilchen mit Lagrangefunktion

$$L=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\dot{\vec{r}}^2_\alpha-\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle}V_{\alpha\beta}(|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|) \tag{22}$$

wo $\vec{r}_\alpha$ Radiusvektor des α-ten Teilchens, $\alpha=1,\ldots,N$, und $\dot{\vec{r}}_\alpha$ seine Geschwindigkeit. Die Funktion $V_{\alpha\beta}=V_{\beta\alpha}$ ist die potentielle Energie der Wechselwirkung der beiden Teilchen α und β, von der hier angenommen wird, dass sie nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt. Die Summe erstreckt sich über alle Teilchenpaare.

3.1 Translationsinvarianz und Impulserhaltung

Für ein N-Teilchensystem ist die **räumliche Translation** definiert

$$\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{a}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, N\,, \tag{23}$$

und induziert die Tangentialabbildung

$$\{\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha\} \mapsto \{\vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{a}, \dot{\vec{r}}_\alpha\}\,. \tag{24}$$

Für die Lagrangefunktion (22) ist Translationsinvarianz offensichtlich garantiert, $L(\{\vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{a}\}, \{\dot{\vec{r}}_\alpha\}) = L(\{\vec{r}_\alpha\}, \{\dot{\vec{r}}_\alpha\})$, also $\chi_\epsilon = 0$. Angesichts

$$\vec{\eta}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\epsilon}(\vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{a})\bigg|_{\epsilon=0} = \vec{a} \tag{25}$$

ist $\vec{a}\cdot\vec{P}$ ein erstes Integral der Bewegung, worin

$$\vec{P} \equiv \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_\alpha} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \tag{26}$$

der **Gesamtimpuls**. Da $\vec{a}$ beliebig,

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0\,, \tag{27}$$

lies: Translationsinvarianz impliziert den **Impulserhaltungssatz**.

Zuweilen wird das formuliert *Homogenität des Raumes impliziert Impulserhaltung*. Gemeint ist damit, dass es schlicht egal ist wo (im Raum) sich das System befindet – es gibt keinen ausgezeichneten Punkt, oder keine ausgezeichnete Region, in der sich die ELG der Lagrangefunktion (22) von anderen Regionen unterscheiden. In einem äusseren Kraftfeld ist das anders.

3.2 Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung

Für ein N-Teilchen System ist die Operation **"Drehung"** definiert

$$\vec{r}_\alpha \mapsto R\vec{r}_\alpha \tag{28}$$

worin R orthogonale Abbildung, $R^{-1} = R^T$.

Die Drehung induziert die Tangentialabbildung[6]

$$\{\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha\} \mapsto \{R\vec{r}_\alpha, R\dot{\vec{r}}_\alpha\}\,. \tag{29}$$

Da sowohl $\dot{\vec{r}}_\alpha^2$ als auch $|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|$ invariant unter Drehungen, ist L **drehinvariant**, insbesondere auch $\chi_R = 0$.

Für kleine Drehungen um eine feste Achse $\vec{n}$,

$$\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{n}\times\vec{r}_\alpha \tag{30}$$

bzw

$$\vec{\eta}_\alpha = \vec{n} \times \vec{r}_\alpha \,. \tag{31}$$

Entsprechend ist $\vec{n} \cdot \vec{L}$ ein erstes Integral der Bewegung, worin

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \tag{32}$$

Gesamtdrehimpuls. Da die Richtung $\vec{n}$ beliebig,

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \,, \tag{33}$$

lies: Drehinvarianz impliziert den **Drehimpulserhaltungssatz**.

3.3 Zeitliche Translationsinvarianz und Energieerhaltung

Da die Zeit t kein dynamischer Freiheitsgrad lassen sich zeitliche Verschiebungen nicht mit Hilfe des Noether-Theorems behandeln sonder bedürfen einer eigenen Überlegung.

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} && (34) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right] - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} && (35) \end{aligned}$$

Längs wahrer Bahnen sind die ELG erfüllt, und also

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{36}$$

Zeitliche Translationsinvarianz bedeutet $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$; in diesem Falle ist

$$E := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \tag{37}$$

ein erstes Inegrale - die **Energie** des Systems - und $\frac{d}{dt}E = 0$ firmiert unter dem Begriff **Energieerhaltungssatz**.

3.4 Schub-Invarianz und Schwerpunktsatz

Man erinnert sich – unter einem **Galileischub** mit Geschwindigkeit $\epsilon\vec{V}$ transformieren Radiusvektoren

$$\vec{r}_\alpha \mapsto \vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{V}t \tag{38}$$

also Tangentialabbildung

$$\{\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha\} \mapsto \{\vec{r}_\alpha + \epsilon\vec{V}t, \dot{\vec{r}}_\alpha + \epsilon\vec{V}\} \tag{39}$$

Die Lagrangefunktion (22) ist zwar nicht invariant, fängt sich aber unter Galileischub nur eine totale Zeitableitung ein,

$$L(\vec{r}+\epsilon\vec{V}t,\dot{\vec{r}}+\epsilon\vec{V})-L(\vec{r},\dot{\vec{r}})=\frac{d}{dt}\chi_\epsilon \tag{40}$$

worin

$$\chi_\epsilon=\epsilon\sum_\alpha m_\alpha\vec{r}_\alpha\cdot\vec{V}+\epsilon^2t\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{2}\vec{V}^2 \tag{41}$$

Noether ist anwendbar

$$\vec{\eta}_\alpha=\vec{V}t\,,\qquad\Gamma=\left.\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=M\vec{R}\cdot\vec{V} \tag{42}$$

wo M **Gesamtmasse** und $\vec{R}$ Massenmittelpunkt, auch **Schwerpunkt**,

$$M=\sum_\alpha m_\alpha\,,\qquad\vec{R}=\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha\vec{r}_\alpha\,. \tag{43}$$

Da $\vec{V}$ beliebig ist die **Schwerpunktverschiebung**

$$\vec{G}:=t\vec{P}-M\vec{R} \tag{44}$$

Konstante der Bewegung,

$$\frac{d}{dt}\vec{G}=0\,. \tag{45}$$

Lies: Schubinvarianz impliziert den **Schwerpunktsatz**. Für Lagrangefunktion (22) gilt wegen Translationsinvariant $\dot{\vec{P}}=0$, womit der Schwerpunktsatz die vertraute Form annimmt

$$\vec{P}=M\dot{\vec{R}}\,. \tag{46}$$

Lies: der Gesamtimpuls ist gleich dem Impuls eines Quasiteilchens der Masse M das sich mit der Schwerpunktgeschwindigkeit $\dot{\vec{R}}$ bewegt.

Man könnte glauben, dass sich Impulserhaltungssatz und Schwerpunktsatz wechselseitig bedingen. Das ist nicht der Fall – der Schwerpunktsatz ist schärfer. Der Impulserhaltungssatz gilt auch bei zeitlich variablen Massen. Der Schwerpunktsatz nicht. Vielmehr $\frac{d}{dt}\vec{G}=\sum_\alpha\dot{m}_\alpha\vec{r}_\alpha$, was nahelegt, den Schwerpunktsatz auch als "Massenerhaltungssatz" zu lesen. Kann man machen – aber streng genommen sind Massen in der Newton'schen Mechanik schlicht Paramter, und keine dynamischen Freiheitsgrade. Und Erhaltungssätze reden nun mal über dynamische Größen und nicht über Paramater (vgl. allerdings die Auslassungen zur Ladungserhaltung weiter unten).

4 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Punktladung e, minimal gekoppelt

$$L_{\text{int}}=e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)-e\phi(\vec{r},t)\,. \tag{47}$$

Werden Potentiale Eichtrafo unterworfen, $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\phi \to \phi' = \phi - \dot{\chi}$, transformiert Lagrange $L_{\text{int}} \to L'_{\text{int}} = L_{\text{int}} + \Delta L_{\text{int}}$, mit $\Delta L_{\text{int}} = e[\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_r \chi(\vec{r}, t) + \partial_t \chi(\vec{r}, t)]$. Mit Kettenregel

$$\Delta L_{\text{int}} = \frac{d}{dt} e\chi(\vec{r}, t)\,, \tag{48}$$

also totale Zeitableitung. Bewegungsgleichung infolgedessen invariant unter Eichtrafo der Potentiale.[1]

An dieser Stelle ist Zusammenhang zwischen Eichinvarianz und Ladungserhaltung zwar nicht direkt erkennbar – schließlich ist Ladungserhaltung für Punktladung definitionsgemäß garantiert – aber es darf vermutet werden "Ladungserhaltung ⇒ Eichinvarianz"

Minimale Kopplung feldtheoretisch $L_{\text{int}} = \int (\vec{j} \cdot \vec{A} - \varrho\phi) d^3x$. Unter Eichtrafo $L_{\text{int}} \to L'_{\text{int}} = L_{\text{int}} + \Delta L_{\text{int}}$ mit

$$\Delta L_{\text{int}} = \int (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}\chi + \varrho \partial_t \chi) d^3x \tag{49}$$

Angesichts $\vec{j} \cdot \vec{\nabla}\chi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}\chi) - \chi \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ und $\varrho \partial_t \chi = \partial_t(\varrho\chi) - \chi \partial_t \varrho$

$$\Delta L_{\text{int}} = \int [\partial_t(\varrho\chi) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}\chi)] d^3x - \int \chi [\partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}] d^3x \tag{50}$$

Der zweite Term im ersten Integral wird mit Hilfe des Gauss'schen Satzes in eine Oberlfächenintegral "im Unendlichen". Da dort die Stromdichte vereinbarungsgemäß immer Null, ist das entsprechende Inegral gleich Null. Der erste Term im ersten Integral ist eine totale Zeitableitung. Verbleibt das zweite Integral. Wird jetzt Ladungserhaltung postuliert, lokal formuliert $\dot{\varrho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, ist das zweite Integral identisch Null, im Endeffekt

$$\Delta L_{\text{int}} = \frac{d}{dt} \int \varrho \chi d^3x\,, \tag{51}$$

was sich für eine Punktladung $\varrho(\vec{x}, t) = e\delta(\vec{x} - \vec{r})$ auf (48) reduziert.

Wird andererseits Eichinvarianz postuliert, also $\delta L_{\text{int}} = \frac{d}{dt} M$ mit irgendeiner Funktion M, erzwingt dieses Postulat die Ladungserhaltung. Zusammengefasst

$$\text{Eichinvarianz} \Leftrightarrow \text{Ladungserhaltung} \tag{52}$$

Noch griffiger läßt sich das Ganze in der 4-er Schreibweise der Relativitätstheorie formulieren. Der Wechselwirkungsbeitrag zur Wirkung, $S_{\text{int}} = \int L_{\text{int}} dt$, transformiert unter einer Eichtrafo $S_{\text{int}} \to S'_{\text{int}} + \Delta S_{\text{int}}$ mit Zusatzterm $\Delta S_{\text{int}} = c^{-1} \int \partial_\mu \chi j^\mu - c^{-1} \int \chi \partial_\mu j^\mu d^4x$ worin $d^4x = cdtd^3x$ das Minkowskivolumen. Das erste Integral wird mit Hilfe des Gauss'schen Satzes zu einem Oberlächenintegral im Minkowskiraum, und verschwindet unter Annahme verschwindender Felder im räumlich Unendlichen. Das zweite Integral ist im Falle der Ladungserhaltung identisch Null, die Wirkung also ohne jedweden Zusatzterm echt eichinvariant $S = S'$.

[1] Lässt man zunächst zeitabhängige Ladung $e = e(t)$ zu – erlaubt also Verletzung der Ladungserhaltung – wäre $\Delta L_{\text{int}} = \frac{d}{dt} e(t)\chi(\vec{r}, t) - \dot{e}(t)\chi(\vec{r}, t)$, angesichts des zweiten Terms also keine totale Zeitableitung. Übung: wie lauten in diesem Fall die Bewegungsgleichungen der Punktladung?

5 Hamilton und Noether

Die Formulierung des Noether-Theorems gestaltet sich im Lagrangeformalismus besonders einfach. Mit Blick auf die Quantenmechanik, die bekanntlich am Hamiltonformalismus anknüpft, erhebt sich die Frage, wie Noether im Bezug auf die "kanonischen Variable" zu formulieren ist.

Man erinnert sich. Den kanonischen Koordintaten q^i einer Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ zugeordnete kanonische Impulse sind verabredungsgemäß

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{53}$$

Die Hamiltonfunktion ist Legendretrafo der Lagrangefunktion

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)\,, \tag{54}$$

wobei die $\dot{q}^i$ via (53) Funktionen der kanonischen Observable q, p und evtl. der Zeit t (falls L explizit zeitabhängig), $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$, und die Bewegungsgleichungen (1) erscheinen in der Form

$$\frac{d}{dt} q^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{d}{dt} p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,. \tag{55}$$

Mit der Verabredung von Poisson-Klammern, in LL-Konvention[2]

$$\{u, v\} := \sum_i \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q^i} - \frac{\partial u}{\partial q^i}\frac{\partial v}{\partial p_i} \tag{56}$$

wird die Zeitentwicklung einer Phasenraumfunktion $A(q, p, t)$ notiert

$$\frac{d}{dt} A = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{57}$$

Eine Phasenraumfunktion $A(q, p, t)$ heißt Konstante der Bewegung, genau dann wenn $\frac{d}{dt} A = 0$.

Unter allen Transformationen der Phasenraumkoordinaten sind die kanonischen Transformationen dadurch ausgezeichnet, dass es für jede gegebenen Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ eine Hamiltonfunktion $K(Q, P, t)$ gibt, dergestalt

$$(\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\dot{Q}, \dot{P}) = \left(\frac{\partial K}{\partial P}, -\frac{\partial K}{\partial P}\right)\,. \tag{58}$$

Mit Blick auf Noether sind insbesondere infinitesimale Transformationen interessant,

$$Q_i = q_i + \epsilon \eta_i(q, p, t)\,, \qquad P^i = p^i + \epsilon \zeta^i(q, p, t) \tag{59}$$

wo ϵ eine kleine Konstante, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Die Trafo ist kanonisch genau dann wenn es eine Funktion $F(q, p, t)$ gibt – genannt Erzeugende der infinitesimalen Trafo () – dergestalt

$$\eta_i = \frac{\partial F}{\partial p^i}\,, \qquad \zeta^i = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{60}$$

[2] Landau-Lifshitz, Bd. I *Klassische Mechanik*

in welchem Falle

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t}\,, \tag{61}$$

wobei q,p via Umkehrung von () als Funktionen von Q,P und t aufzufassen sind. Durch Entwicklung nach ϵ lässt sich die reche Seite von () auf die neuen Phasenraumkoordinaten umschreiben, so dass ()

$$K(Q,P,t) = H(Q,P,t) + \epsilon\, \frac{dF(q,p,t)}{dt}\bigg|_{Q,P} \tag{62}$$

Eine kanonische Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ definiert genau dann eine Symmetrie, sofern mit $q(t),p(t)$ Lösung von (), auch $Q(t) = Q(q(t),p(t),t), P(t) = P(q(t),p(t),t)$ Lösung von (). Formuliert als Noether-Theorem: eine infinitesimale kanonische Transformation $(q,p) \mapsto (Q,P)$ mit Erzeugender F definiert genau dann eine Symmetrie wenn $K(Q,P,t) = H(Q,P,t)$, also F Erhaltungsgröße, $\frac{dF}{dt} = 0$, bzw $H(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}$.

Ihnen bleibt als Übung, die zehn klassischen Erhaltungssätze im Hamiltonformalisum abzuleiten.

Betrachtet man in () das ϵ als Variable, und schreibt statt Q nun $q(\epsilon)$ und statt P entsprechend $p(\epsilon)$, lässt sich () mit ein wenig Phantasie und unter Verwendung der Poisson-Klammern erweitern,

$$\frac{dq(\epsilon)}{d\epsilon} = \{F,q\}\,, \qquad \frac{dp(\epsilon)}{d\epsilon} = \{F,p\}\,. \tag{63}$$

wobei die Erweiterung darin besteht, dass ϵ nun keineswegs mehr klein sein muss, sondern beliebige Wert annehmen darf. Lösungen des Gleichungssystems () definieren dann eine ϵ-Schar von kanonischen Transformationen, und diese Schar definiert eine Abelsche Transformstionsgruppe mit F als Erzeugender. Für festes ϵ ist nämlich $q \mapsto Q_\epsilon = q(\epsilon)$ kanonisch, und bei der Verkettung kommt es auf die Reihenfolge nicht an.

6 Noether in Quantenmechanik

Kanonischen Trafos der klassischen Mechanik entsprechen unitäre Abbildungen in der Quantenmechanik.

Als Beispiel betrachten wir die Verschiebung, klassisch $q \mapsto q' = q + a$. Erzeugende der Verschiebung ist der kanonische Impuls. Quantenmechanisch

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} a\hat{p}\right\} |\psi\rangle \tag{64}$$

interpretiert: präpariert ein Präparator ein Quantenteilchen im Zustand $|\psi\rangle$, so präpariert der um a verschobene Präparator – bei ansonsten gleichem Vorgehen – das Quantenteilchen im Zustand $|\psi'\rangle$.

Unter Beachtung der zauberhaften Identität No 1[3]

$$\hat{q}(a) := e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}} = \hat{q} + a\,. \tag{66}$$

ist der Ortserwartungswert im transformierten (=verschobenen) Zustand gegeben

$$\begin{aligned} \langle\hat{q}\rangle_{\psi'} \equiv \langle\psi'|\hat{q}|\psi'\rangle &= \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\hat{q}e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}|\psi\rangle & (67)\\ &= \langle\hat{q}\rangle_{\psi} + a\,. & (68)\end{aligned}$$

Lies: der Erwartungswert verschiebt sich mit der Verschiebung des Präparators. Ihnen bleibt als kleine Übungsaufgabe zu bestätigen

$$\psi'(x) \equiv \langle x|\psi'\rangle = \psi(x-a) \tag{69}$$

Ebenso wie Verschiebungen im Ortsraum können natürlich auch Verschiebungen im Impulsraum durchgeführt werden, $p \mapsto p' = p + b$. Erzeugende ist hier $-\hat{q}$ (man beachte das Vorzeichen). Quantenmechanisch also

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}b\hat{q}\right\}|\psi\rangle \tag{70}$$

und unter Beachtung der zauberhaften Identität No 2

$$\hat{p}(b) := e^{-\frac{i}{\hbar}b\hat{q}}\hat{p}e^{\frac{i}{\hbar}b\hat{q}} = \hat{p} + b\,, \tag{71}$$

findet sich hier schnell

$$\langle\hat{p}\rangle_{\psi'} = \langle\hat{p}\rangle_{\psi} + b \tag{72}$$

wie erwartet.

Schließlich der Galilei-Schub, klassisch $q \mapsto q+Vt, p \mapsto p+mV$. Erzeugende ist $G = tp - mq$, quantenmechanisch also

$$\begin{aligned} |\psi_t\rangle \mapsto |\psi'_t\rangle &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}V\left(t\hat{p} - m\hat{q}\right)\right\}|\psi_t\rangle & (73)\\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{mV^2}{2}t}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}mV\hat{q}\right\}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Vt\hat{p}\right\}|\psi_t\rangle & (74)\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung von der Baker-Campbell-Hausdorff Identität Gebrauch gemacht wurde.[4] In der Ortsdarstellung

$$\psi'(x,t) \equiv \langle x|\psi'_t\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}mVx - \frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}V^2t\right\}\psi(x-Vt,t)\,. \tag{75}$$

[3] Zum Beweis differenzierene wir $\hat{q}(a)$ nach a,

$$\frac{d\hat{q}(a)}{da} = \tfrac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\left[\hat{p},\hat{q}\right]e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}} = 1 \tag{65}$$

und lösen die DGL mit Anfangsbedingung $\hat{q}(a=0) = \hat{q}$.

[4] Für Operatoren $\hat{X}$ und $\hat{Y}$, deren Kommutator $[\hat{X},\hat{Y}]$ sowohl mit $\hat{X}$ als auch mit $\hat{Y}$ kommutiert gilt $e^{\hat{X}+\hat{Y}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}]}e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}}$.

Unter

$$|\psi(t)\rangle \mapsto |\psi'(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{F}(t)\right\}|\psi(t)\rangle \tag{76}$$

transformiert die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \mapsto i\hbar\partial_t|\psi'(t)\rangle = \hat{H}'(t)|\psi'(t)\rangle \tag{77}$$

wo $\hat{H}'(t)$ der transformierte Hamiltonoperator

$$\hat{H}'(t) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{F}(t)}\hat{H}(t)e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{F}(t)} - e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{F}(t)}\left(i\hbar\partial_t e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{F}(t)}\right). \tag{78}$$

Die Trafo ist Symmetrietrafo genau dann wenn mit ψ auch ψ' Lösung der Schrödingergleichung zu ein und demselben Hamiltonoperator $\hat{H}$, also $\hat{H} = \hat{H}'$. Ausgewertet für kleine α schaut man auf das Noether-Theorem der Quantenmechanik

$$\hat{F} \text{ Erzeugende einer Symmetrietrafo} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\hat{F} \equiv \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{F}\right] + \frac{\partial\hat{F}}{\partial t} = 0\,. \tag{79}$$

Anmerkungen

[1]Emmy Noether (1882–1935) war eine bedeutende Mathematikerin, die grundlegende Beiträge zur Algebra und zur theoretischen Physik geleistet hat. Jeder Studierende der Physik sollte mit ihrer Biographie zumindest kursorisch vertraut sein, beispielsweise aus der Wikipedia.

[2]Es ist $\frac{d}{dt}\chi(q,t) = \dot{q}^i\chi_{,i}(q,t)+\chi_{,0}$ wo abkürzend $\chi_{,i} := \frac{\partial\chi}{\partial q^i}$, und $\chi_{,0} := \frac{\partial\chi}{\partial t}$. Damit $\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} + \chi_{,i}$, somit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right) + \dot{q}^j\chi_{,ij} + \chi_{,i0}$. Da andererseits $\frac{\partial L'}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\dot{q}^j\chi_{,j} + \chi_{,0}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{q}^j\chi_{,ji} + \chi_{,0i}$, angesichts $\chi_{,ij} = \chi_{,ji}$ und $\chi_{,i0} = \chi_{,0i}$ also $\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial L'}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$.

[3]Die q^i und $\dot{q}^i$ sind Koordinaten des sog *Tangentialbündel* $\mathcal{T}M = \bigcup_{P\in M}\mathcal{T}_P M$, worin M Konfigurationsraum (Koordinaten q) und $\mathcal{T}_P M$ Tangentialraum an $P \in M$ (Koordinaten $\dot{q}$).

[4]Differentialgeometrisch steck dahinter das Postulat: Lagrangefunktion ist eine skalare Funktion auf $\mathcal{T}M$.

[5]Wer Eindruck schinden will kann das auch zusammenfassen "Die Euler-Lagrange Gleichungen sind eine Invariante der Diffeomorphismengruppe des Konfigurationsraumes".

[6]Man beachte, dass $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ der gleichen Drehung R unterworfen sind. Das muss so sein, denn $\dot{\vec{r}}$ is ja Ableitung der Koordinate $\vec{r}$ nach der Zeit, und die ist ein "Dreh-Skalar", also invariant unter räumlichen Drehungen.