series of un-authorized lecture notes
volume 1

propädeutikum physik – nicht nur fürs Lehramt

Mathematische Methoden

martin wilkens

Vorwort

Ein notorisches Problem im Lehramtsstudium Physik ist die Mathematikausbildung, die im Vergleich zum 1-Fachstudium Physik mager ausfällt. Betroffen sind insbesondere Lehramtsstudierende, die weder im Haupt- noch im Nebenfach (Studienordnung vor 2013) bzw als anderes Fach (Studienordnung ab 2013) Mathe belegt haben. Ihnen – aber nicht nur ihnen – sollen die "Mathematischen Methoden" das nötige Handwerkszeug vemitteln um im Physikstudium über die Runden zu kommen.

Die MathMeth werden in Potsdam über zwei Semester gestreckt. Im Wintersemester werden im Format 2V2Ü die Vektorrechnung, komplexe Zahlen und Grundlagen der reellen Analysis behandelt. Im Sommersemester folgen im Format 2V2Ü die Vektorfelder, DivGradRot, die Integralsätze von Gauss und Stokes, die Fouriertransformation, und eine Einführung in die Variationsrechnung[1] Die Portionierung der Inhalte folgt der Regel "eine Woche – ein Thema – ein Kapitel (im Skript)".

Außer dem kleinen Ein-Mal-Eins und einer gehörigen Portion Disziplin werden keinerlei Kompetenzen vorausgesetzt. Wer die Regeln der Bruchrechnung vergessen

[1] xVyÜ steht für "x Semesterwochenstunden (SWS) Vorlesung nebst y SWS Übung". Das Normsemester hat 15 Wochen. Entsprechend sitzen Sie im Forma 2V1Ü genau 45 Schulstunden in der Uni rum . . .

hat – und das kann ja schon mal passieren – wird in den ersten Vorlesungen an sie erinnert.

Die Notizen erheben keinerlei Anspruch auf Originalität, sind vollständig unvollständig und voller unbeabsichtigter Fehler. Aktualisierungen und weiteres Material zur Vorlesung finden Sie im Ordner "Teaching" auf `http://www.quantum.physik.uni`

Physik und Mathematik sind wie ein Zwillingspaar. Das eine ist ohne das andere nichts, und keiner war ehr da.[2] Warum allerdings eine empirische Disziplin, deren letzter Richter immer das Experiment, und eine theoretische Disziplin, deren letzte Instanz immer die Beweisbarkeit (das Manipulieren von Aussagen), so wundersam verschränkt sind, weiß man nicht so recht. "Warum", fragt Eugene Wigner in einem bemerkenswerten Aufsatz von 1960, "ist die Mathematik in der Physik so effektiv?".[3] Eine Antwort kann Wigner auch nicht geben. Lesenswert ist der Aufsatz allemal.

Galilei Galileo, der Vater der experimentellen Naturwissenschaften, hat sich wenig um das "Warum" geschert, sondern kurz und bündig konstatiert:

> Das Buch der Natur kann man nur verstehen, wenn man vorher die Sprache und die Buchstaben gelernt hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Hilfsmittel ist es Menschen unmöglich, auch nur ein Wort davon zu begreifen.

[2]In einer glänzenden Philippika *On teaching mathematics* (1997, nachzulesen auf: `http://pauli.uni-muenster.de/ munsteg/arnold.html`) geißelt der große Mathematiker V.I. Arnol'd seine Fachkollegen, sie hätten sich in der Lehre von der Verschränkung von Physk und Mathematik unverhältnismäßig weit entfernt. Insbesondere die eher mittelmäßig begabten Mathematiker würden nur noch einem blutleeren Götzen der reinen Axiomatik huldigen um ihre Mediokrizität zu verbergen.

[3]Eugene Wigner *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* in: Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (Februar 1960).

Das soll nun erst mal als Begründung reichen, warum Sie ausgerechnet Mathe studieren sollen, wo sie doch Physik studieren wollen . . .

Heutzutage sind allerdings nicht geometrische Figuren die "Buchstaben der Mathematik", sondern Zahlen, Vektoren und Morphismen, und auch die Sprache – ehemals Arithmetik und Geometrie – ist um Analysis und Lineare Algebra erweitert.

So kommt es, dass in den Einführungsvorlesungen eines Physikstudiums ohne viel Federlesen sogleich von Funktionen, Ableitungen und Integralen die Rede ist, so manche Funktion in einer Taylorreihe entwickelt oder in einer Fourierreihe dargestellt wird, kurz mal eben Differentialgleichungen integriert und Vektoren in der einen oder anderen Art mutlipliziert werden.

In den ersten Vorlesungen zur Experimentalphysik, beispielsweise, kommen aus der Analysis zum Einsatz

- Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, nebst der Formel für ihre Nullstellen
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$
- Komplexe Zahlen mit der imaginären Einheit i, definiert $i^2 = -1$.
- Die Exponentialfunktion e^x und die Trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, ihre charakteristischen Merkmale, insbesondere $e^{ax}e^{bx} = e^{(a+b)x}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, nebst ihrer jeweiligen Ableitung $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ und Stammfunktion $F(x) := \int^x f(x')dx'$.
- Die Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung und die Technik der partiellen Integration für die Integralrechnung.
- Die Taylorentwicklung bzw Taylorapproximation einer "komplizierten" Funktion durch eine "einfache" Funktion

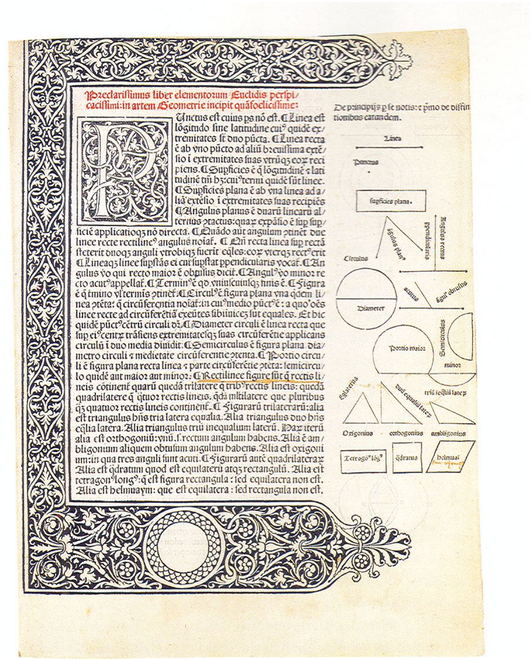

Abb 0.1 *Euklids "Elemente" – die Sprache der Mathematik zu Galileis Zeit.*

- Differentialgleichungen, etwa in Form “Masse-mal-Beschleunigung gleich Kraft”. Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, und das besagte Gesetz nimmt dann im einfachsten Fall die Form der gewöhnliche Differentialgleichung $m\frac{d^2}{dt^2}q(t) = F(q(t))$ an. Gesucht ist bei so einer Differentialgleichung immer eine Funktion die die Differentialgleichung befriedigt, in unserem Beispiel also irgendeine Funktion $q(t)$, die – wenn man sie zwei mal ableitet und mit m multipliziert das gleiche liefert wie die Funktion $f(t) = F(q(t))$.

und aus der linearen Algebra

- Vektor, bildlich “Pfeil”
- Länge eines Vektors, Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$, Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ und Spatprodukt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
- Matrix, insbesondere 3×3 Matrix für die Darstellung von Tensoren (Trägheitstensor etc.) und Koordinatentransformation, insbesondere Drehung des Koordinatensystems
- Determinante, für die Berechnung von Volumina, aber auch zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer linearen Differentialgleichung usw.

Wie schon gesagt – in den ersten paar Vorlesungen …und dann geht das genauso weiter. Die Liste soll übrigens keinsfalls behaupten, dass Sie das alles schon in der Schule gehabt haben. Das haben Sie wahrscheinlich nicht. Es ist nur eine Liste von den Dingen, mit denen Sie vermutlich ganz schnell konfrontiert werden.

Mathematik lernen entspricht dem Erlernen einer Fremdsprache. Eine Fremdsprache aber, in der sie nicht irgendwann einkaufen oder im Restaurant bestellen können, sondern einer Fremdsprache mit der sie sich eine andere Fremdsprache – die Physik – erschließen. Wenn Sie nämlich physikalische Sachverhalte beschreiben, und schließlich auch verstehen, dann treffen Sie mathematische Aussagen über physikalische Größen. Johann Keplers "Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen" ist so eine Aussage – auch wenn Sie hier kein Gleichheitszeichen sehen und keine Formel. Verstehen tun Sie diese Aussage als mathematisch notwendige Konsequenz einer Kombination des Newton'schen Gravitationsgesetzes, demzufolge die Anziehungskraft zweier Massen umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstands, mit dem Äquivalenzprinzip, demzufolge sich träge und schwere Masse eines Körpers bis aufs Haar gleichen. Wohlgemerkt, die Prinzipien sind Physik, die Konsequenzen sind nichts als ein mathematisches Essay.[4]

Solche Essays zu lesen, und im täglichen Physikerdasein selber kleine Essays zu verfassen bedarf es mehr als nur die "Buchstaben" zu kennen und zu erkennen. Sie müssen auch Wörter und vollständige Sätze bilden können, möglichst mit richtiger Kommasetzung. Sie müssen – kurz gesagt – auch die Grammatik der Mathematik zumindest in ihren Grundzügen beherrschen. Eine kurze Übersicht findet sich im **Anhang A: Logik für Laien**. Falls man vergessen hat, was eine Aussage ist, eine Gleichung, oder eine Beweis . . .

Es gibt Kollegen die überzeugt sind, dass beispielsweise die ganzen Grenzwert-Betrachtungen der Analysis – im Jargon genannt "die Epsilontik" – für den wahren Physiker überflüssige Grammatik ist: *Hauptsache, man kann den Sinus ableiten und integrieren! Der Rest ist was für Erbsenzähler* sagen sie, *und fürs Erbsenzählen hat man in der Physik schon gar keine Zeit.* Der Kollege hat natürlich völlig Recht: niemand, der noch alle Tassen im Schrank hat, wird im täglichen Geschäft bei der Ableitung des Sinus zur Epsilontik greifen. Das muss Zack-Zack gehen, und Zack-Zack kommt nur durch Übung. Der Kollege hat den Sinus schon tausendmal abgeleitet,

[4]Newton ging hier übrigens genau in der anderen Richtung vor. Sein Ausgangspunkt war Keplers drittes Gesetz. Sein Endpunkt war sein Gravitationsgesetz, wobei der auf dem Weg die Analysis mal eben kurz aus der Taufe hob – vgl. die Handreichung "Kepler, Newton und so" auf der Webseite des Kurses.

und nun geht das bei ihm ganz mechanisch (er “sieht” sofort Cosinus). Das Fundament – die Epsilontik – konnte ihm dabei getrost aus seinem Blickfeld geraten. Aber wenn er zurückdenkt an seine eigene Studienzeit fällt ihm vielleicht auf, dass gerade seine *eigene* Einsicht in die Festigkeit des Fundaments es ihm schließlich erlaubt hat, sich aus dem Keller in die oberen Etagen zu bewegen. Und wenn er denn gefragt wird, wie man denn $\sqrt{2}$ ausrechnet, dann wird er zwar die Antwort nicht parat haben,[5] aber er wird hoffentlich einen Weg zurück in den Keller kennen, und dort eine Ecke am Fundament angeben können, wo man die Antwort findet.

Es hilft also nichts. Nur “Rechnen können” reicht nicht aus. Man muss auch die Fundamente kennen und sich ihrer Festigkeit selbst vergewissert haben. Man muss – um noch ein Bild zu bemühen – bei Adam und Eva anfangen. Bei Menge und Zahl, bei Folge und Reihe, bei Klein und Groß. Dabei muss man aber möglichst schnell auch Sinus ableiten und Tangens integrieren können. Tja – wenn das mal gut geht ...

Mathematik lernen Sie nicht in der Vorlesung. Die zeigt allenfalls einen roten Faden der ihr Selbststudium erleichtern soll. Mathematik lernen Sie indem Sie in der Vorlesung mitschreiben, Ihre Mitschrift zu Hause in Ordnung bringen, die Übungen bearbeiten und – mit Papier und Bleistift gewappnet – ein Mathebuch lesen. Empfohlen sei hier

- Alfred Rieckers und Kurt Bräuer “Einladung zur Mathematik”, Logos 2002. Tut was es behauptet. Nicht sonderlich systematisch, aber guter Leitfaden für die Vorlesung.
- Siegfried Großmann “Mathematischer Einführungskurs – für die Physik”, 8. Auflage, B. G. Teubner 2000. Mit Ausnahme der Rechnens im Komplexen ist hier auf nur 344 Seiten alles zusammengefasst, “was man so braucht”. Etwas

[5] es sei den er greift zu besonders geistreichen Antwort *Mit dem Computer!*

"rechenorienterter" als Rieckers/Bräuer; setzt allerdings voraus, dass Sie ihr Abi vor G12 gemacht haben ... am besten in den 1970'er Jahren oder davor.

- Herrmann Schulz "Physik mit Bleistift", 7. Auflage, Harri Deutsch 2009. Sehr gut, wenn man schon einen roten Faden hat, aber nicht weiß, wo der hinführt. Ausgezeichnet die Pflege von Papier-und-Bleistift.

Etwas härtere Kost, aber Grundlage dieser Vorlesung

- Friedhelm Erwe "Differential- und Integralrechnung" (Band 1: Elemente der Infinitesimalrechnung und Differentialrechnung, Band 2: Integralrechnung), B.I. Hochschultaschenbücher Bde. 30 und 31, B.I.-Wissenschaftsverlag 1962, [ISBN 3-411-00030-9 und 3-411-00031-7]. Solide Wertarbeit. Hat bereits Generationen von Mathe- und Physikstudenten gedient.

- Konrad Königsberger "Analysis 1" (5. Auflage), Springer 2001 [ISBN 3-540-41282-4] und "Analysis 2" (3. Auflage), Springer 2000 [ISBN 3-540-66902-7]. Thematische Breite und Tiefe in etwa wie Erwe, in der Sprache etwas moderner. Empfehlenswert.

- Klaus Jänich "Mathematik 1 – Geschrieben für Physiker" und "Mathematik 2 – Geschrieben für Physiker", Springer 2001 und 2002 [ISBN 3-540-41976-4 und 3-540-42839-9]. In parlierendem Ton das volle Programm für den kanonischen Fachstudenten im Physik Bachelor. Zuweilen geht die Gratwanderung zwischen Fachsystematik der Mathematik und Zielgruppenorientierung Physik schief. Das stört die Puristen, lässt mich aber vergleichsweise kalt.

- "Analysis I" und "Analysis II" von Herbert Amann und Joachim Escher, Birkhäuser. Meine derzeitigen Favoriten. Nicht ganz so trocken wie Erwe oder Königsberger, nicht ganz so verplaudert wie Jänich. Insbesondere auch für Studierende der Mathematik hervorragend geeignet.

Vertiefende Monographien zu speziellen Kapiteln:

- Heinz-Dieter Ebbinghaus et al. “Zahlen”, 3. Auflage, Springer 1992. Ok – eher was für Aficionados. Aber zauberhaft in seinen Ausführungen zur Ideengeschichte der Mathematik. Also genau das richtige für Studierende in Lehramtsstudiengängen ...
- Klaus Jänich “Lineare Algebra”, 7. Auflage, Springer 1998 [ISBN 3-540-64535-7]. Ein wunderbares Lehrbuch zu einem wichtigen Werkzeug der Physik. Für Mathematik- und Physikstudierende gleichermaßen geeigent.
- Klaus Jänich “Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen”, 3. Auflage, Springer 1995 [ISBN 3-540-58878-7]. Hier findet sich, was bei Großmann fehlt – nämlich Arithmetik und Analysis im Komplexen.
- Klaus Jänich “Vektoranalysis”, 2. Auflage, Springer 1993 [ISBN 3-540-57142-6]. Das klingt wie div grad rot, ist aber eigentlich eine wunderschöne Einführung in die Differentialgeometrie. Hat einen Ehrenplatz auf meinem Regal. Brauchen Sie aber allenfalls im zweiten Teil (Sommersmester).

Ach ja – eh’ ichs vergesse: lernen geschieht durch üben. Und geübt wird mit Papier und Bleistift (oder Kugelschreiber).[6]

▷ **Aufgabe 0-1** (1 Punkt)

Schreiben Sie uns diejenigen Formeln auf, die Ihnen im Laufe der Woche begegnen, etwa in den Vorlesungen zur Experimentalphysik, und die Ihnen unklar sind.

[6] ... bitte nicht mit Füller. Füller (und das “Korrekturinstrument” Tintenkiller) sind gut für Liebesbriefe, aber in mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen ungeeignete Schreibwerkzeuge.

▷ **Aufgabe 0-2 (Galilei's Fallgesetz)** (6 Punkte)

In den "Discorsi" schreibt Galilei in der Einleitung zum Dritten Tag

> [...] Einige leichtere Sätze hört man nennen: wie zum Beispiel, dass die natürliche Bewegung fallender schwerer Körper eine stetig beschleunigte sei. In welchem Masse aber diese Beschleunigung stattfinde, ist bisher nicht ausgesprochen worden; denn so viel ich weiss, hat Niemand bewiesen, dass die vom fallenden Körper in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken sich zueinander verhalten wie die ungeraden Zahlen.

Soweit Galilei. Wie passt das zu dem, was Sie in der Schule gelernt haben?

Anmerkung: Galilei kannte noch keine Infinitemsimalrechnung. Die wurde erst von Newton und Leibniz erfunden.

▷ **Aufgabe 0-3** (1 Punkt)

Gehen Sie an eine Kreidetafel. Skizzieren Sie freihändig einen Kreis (Durchmesser ca 50 cm) und tragen seinen Mittelpunkt ein. Wenn er "ei-ig" aussieht, wiederholen Sie die Übung bis sie einigermaßen zufrieden sind.

Inhalt