Kapitel 3

Vektor

Schlägt man ein beliebiges Physikbuch auf stößt man unweigerlich auf den Begriff "Vektor". Geschwindigkeit ist ein Vektor, Beschleunigung ist ein Vektor, aber auch Impuls, Kraft usw bis hin zum notorischen Ortsvektor, der die Position eines Körpers relativ zu einem Bezugspunkt angibt.[1] Gemäß Berkley Physik Kurs, Band 1, sind solche "Newton'schen Vektoren" durch Betrag und Richtung charakterisiert, was sich wunderbar durch Pfeile veranschaulichen läßt, die im Raum frei verschiebbar sind – denken Sie nur an das Kräfteparallelogramm, das Sie in der Schule kennengelernt haben. In dem Zusammenhang erinnern Sie sich auch, dass sich Kräfte addieren lassen – bildlich: aneinanderhängen – und mit Zahlen malnehmen lassen – bildlich: strecken oder stauchen – ohne den Raum der Kraftvektoren zu verlassen.

Neben den erwähnten Newton'schen Vektoren gibt es in der Physik aber noch ein Menge anderer Größen die unter die Kategorie "Vektor" fallen. Auch die Wellenfunk-

[1] Der Ortsvektor ist eigentlich kein Vektor (man kann Orte nicht addieren). Vektoriell ist allenfalls die Verschiebung, die den Bezugspunkt O in den Positionspunkt P verschiebt.

tionen der Quantenmechanik, beispielsweise, lassen sich addieren und mit Zahlen multiplizieren ohne den Raum der Wellenfunktionen zu verlassen. Einen Pfeil wird man so einer Wellenfunktion schwerlich zuweisen wollen. Trotzdem – aus mathematischer Sicht handelt es sich auch bei den Wellenfunktionen der Quantenmechanik um Vektoren.

3.1 Vektorraum

Wichtige Dinge sollte man auch einmal anständig definieren. Hier also

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein $\mathbb{K}$-**Vektorraum** ist eine Menge V auf der eine Abbildung **Vektoraddition**

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned} \tag{3.1}$$

und eine Abbildung **Skalarmultiplikation**[2]

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda\vec{v} \end{aligned} \tag{3.2}$$

gegeben sind, die den folgenden 8 Axiomen genügen:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
3. Es gibt ein ausgezeichnetes Element $\vec{o} \in V$, genannt "Nullvektor", mit $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$.

[2] Der Funktor für die Skalarmultiplikation bleibt hier namenlos.

4. Zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein Element $-\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o}$.
5. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.
6. $1\vec{v} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$.
7. $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}, \vec{u} \in V$.
8. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.

Außerdem vereinbaren wir $\vec{v}\lambda := \lambda\vec{v}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.

Für die Physik von besonderem Interesse sind reelle und komplexe Vektorräume, also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die $\lambda \in \mathbb{K}$ nennt man auch **Skalare** des Vektorraums, die Menge V auch die **Grundmenge**, die Vektoraddition und Skalarmultiplikation nennt man **Vektoroperationen** und einen Ausdruck $\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}$ nennt man eine **Linearkombination**. Pedantisch notiert man einen Vektorraum als Tripel $(V, \mathbb{K}, +)$, redet zuweilen von einem *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, ruft das Tripel aber meist einfach beim Namen der Grundmenge V.

Hat man eine Teilmenge U eines Vektorraums V, kann man die Elemente von U zwar addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, aber es ist nicht garantiert, dass mit $\vec{u}, \vec{w} \in U$ auch $\vec{u} + \vec{w} \in U$. Teilmengen für die das garantiert ist, verdienen besondere Beachtung, etwa in Form einer

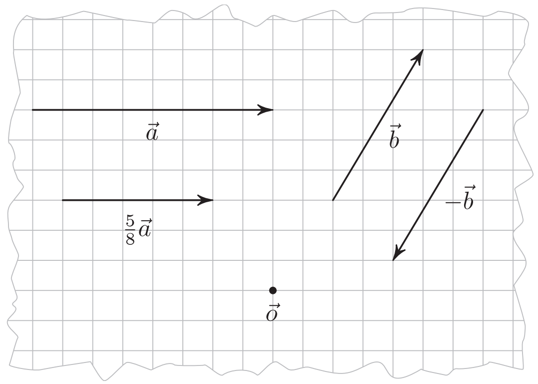


Abb 3.1 *Illustration der Skalarmultiplikation und Inversion.*

Definition (Untervektorraum): Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ definiert einen *Untervektorraum* von V, wenn (1) $U \neq \emptyset$, und (2) für alle $\vec{u}, \vec{w} \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\vec{u} + \vec{w} \in U$, $\lambda\vec{u} \in U$.

Ein Untervektorraum U ist also selbst ein Vektorraum. Insbesondere sind $\{\vec{o}\}$ und V selbst Untervektorräume von V.

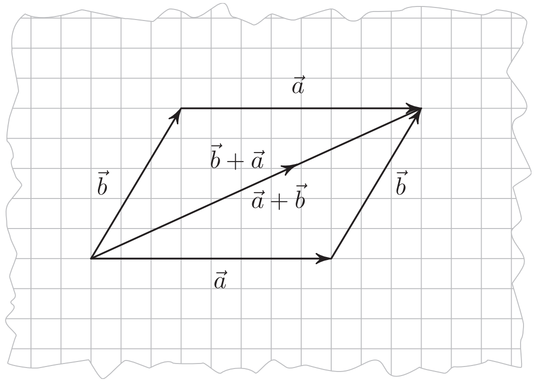


Abb 3.2 *Addition zweier Vektoren und Illustraion des Kommutativgesetzes.*

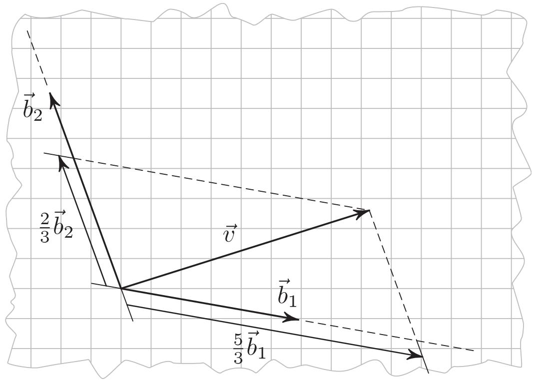


Abb 3.3 *Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ in einer Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Im Beispiel ist $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2$, also $v^1 = \frac{5}{3}$, $v^2 = \frac{2}{3}$.*

Sind U und W Untervektorräume von V, so ist auch der Durchschnitt $U \cap W$ Untervektorraum von V. Allerdngs ist die Vereinigungsmenge $U \cup W$ zweier Untervektorräume U, W i.A. kein Untervektorraum (wer's nicht glaubt: Beweis als Übungsaufgabe!).

Hat man ein System von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V$ nennt man die Menge aller **Linearkombinationen** $L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) := \{\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ die **lineare Hülle** des Systems. So eine lineare Hülle ist offensichtlich immer auch ein Untervektorraum von V, und man sagt das System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V$ sei ein **Erzeugendensystem** dieses Untervektorraums. Die Vektoren des Erzeugendensystems $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ heißen **linear unabhängig**, wenn in der Darstellung des Nullvektors $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_k = \vec{o}$ notwendig alle Skalare gleich Null; andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Ein System $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ konstituiert eine **Basis** von V, notiert $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, wenn das (1) System linear unabhängig, und (2) wenn jeder Vektor von V als Linearkombination der $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ dargestellt werden kann. Die Zahl der Vektoren in einer Basis ist für alle Basen eines Vektorraums die Gleiche, und definiert die **Dimension** des Vektorraums. Die Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ in einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ notiert man

$$\vec{v} = \vec{b}_1 v^1 + \vec{b}_2 v^2 + \cdots + \vec{b}^n v^n = \sum_i \vec{b}_i v^i =: \vec{b}_i v^i \tag{3.3}$$

wobei ganz rechts die **Einsteinsche Summenkonvention** eingeführt wurde: "über doppelt auftretende, schräg gestellte Indices wird summiert."[3]

[3]Unter leichter Sprachverdrehung nennt man v^i die i**-te Komponente** von $\vec{v}$ (obwohl es sich eigentlich um eine Koordinaten handelt). Bei dem von uns favorisierten **Ricci-Kalkül** werden Basisvektoren mit einem nach unten gestellten Index abgezählt, Koordinaten mit einem nach oben gestellten Index. In vielen Lehrbüchern wird der Abzählindex i bei den Koordinaten allerdings gerne nach unten gestellt, und man schreibt dann v_i statt v^i. Das ist inbesondere für Novizen hilfreich, kommen sie doch nicht in Versuchung, die i-te Koordinate als i-te Potenz von v, "vau-hoch-iih", zu lesen. Wir bleiben hier aber bei der Hochstellung. Tiefgestellte Indices an Koordinaten werden weiter unten noch gebraucht – Stichwort Dualraum.

Zum Abschluss dieses Abschnitts, noch ein paar Beispiele:

Beispiel 1 (Zahlenspalten): Der $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen. So ein n-Tupel notieren wir jetzt mal als Spalte (notiert mit Unterstrich)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

wobei in dem von uns favorisierten Ricci-Kalkül mit x^i wie gesagt eine bestimmte Zahl in der i-te Zeile des Spaltentupels gemeint ist, und nicht etwa "icks-hoch-i". Jetzt vereinbaren wir noch, wie Spalten zu addieren sind,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

und wie man Spalten mit einer reellen Zahl multipliziert,

$$\lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Rechenoperationen für Zahlenspalten sind damit auf Rechenoperationen mit gewöhnlichen Zahlen zurückgeführt. Und siehe da – die hier eingeführten Rechenoperationen genügen den Vektroraumaxiomen! Kurz: Zahlenspalten bilden einen Vektorraum – den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Eine beliebt Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden die Vektoren

$$\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

genannt die **kanonische Basis**. Die Zahl der Basisvektoren ist n – der $\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Von prominenter Bedeutung der $\mathbb{R}^3$ – in ihm finden die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft und andere Größen der Newton'schen Physik ihr natürliches Habitat. Im $\mathbb{R}^4$ die 4-er Vektoren der Relativitätstheorie, und im $\mathbb{C}^2$ die quantenmechanischen Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$ Freiheitsgrades. Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, beispielsweise, kann man sich in Form der Geraden und Ebenen durch den Ursprung veranschaulichen.

`[Die Notation mit dem Unterstrich für die Zahlenspaltenvektoren -- und eben nicht mit dem Pfeil auf dem Kopf -- soll daran erinnern, dass wir in der Physik mit den Zahlenspaltenvektoren immer Vektoren bezüglich einer irgendwie gewählten Basis bezeichnen. Ein Zahlenspaltenvektor ist eben nicht` ***der*** `Geschwindigkeitsvektor, sondern lediglich Darsteller eines solchen. Andere Basis -- anderer Darsteller.]`

Beispiel 2 (Funktionen): Eine $\mathbb{K}$-wertige Funktion auf einer Menge X, daran sei erinnert, ist ja nicht anderes als eine Abbildung $X \to \mathbb{K}$. Sei beispielsweise $\mathcal{F}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf dem Intervall $X = [-1, 1]$, also $\mathcal{F} = \{f | f : [-1, 1] \to \mathbb{K}\}$. Mit der Verabredung

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \tag{3.8}$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \tag{3.9}$$

für alle $x \in [-1, 1]$ sind Addition von Funktionen und Skalarmultiplikation punktweise erklärt. Man überzeugt sich, dass mit $f, g \in \mathcal{F}$ auch $f + g$ und λf Element von $\mathcal{F}$, d.h. auch $(\mathcal{F}, \mathbb{K}, +)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum (Pfeilchen auf dem Kopf erspart man sich in diesem Kontext). Eine endliche Basis lässt sich hier nicht angeben – der $\mathcal{F}$ ist ein *unendlich dimensionaler* Vektorraum. Vektoren diesen Typs begegnen Ihnen beispielsweise in der Quantenmechanik des "Teilchens in der Kiste". Eine Funktion $f(x)$ heißt dort Wellenfunktion, und mit (3.8) und (3.9) findet das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik seine mathematische Formulierung.

Beispiel 3 (Im Supermarkt) Glauben Sie nicht, alle Vektoren hätten irgendwas mit Physik zu tun. Im Gegenteil – viele Vektoren, denen man im täglichen Leben begegnet kommen ganz ohne Physik. Gehen Sie beispielsweise einkaufen, und laden in ihren Wagen vier Äpfel, drei Birnen und einen Viertel Liter Sahne – schon haben sie einen Vektor. Denn mit der Verabredung $\vec{a}_1 =$ Apfel, $\vec{a}_2 =$ Birne und $\vec{a}_3 =$ LiterSahne liest sich ihr Einkaufswagen $\vec{v} = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \frac{1}{4}\vec{a}_3$. Und dass es sich hier tatsächlich um einen Vektor handelt, stellen sie schnell fest, wenn sie den Inhalt ihres Einkaufswagens mit dem ihrer Bekannten vereinen. Das Resultat ist die Linearkombination zweier Vektoren – als wiederum Inhalt eines einzigen Einkaufswagens. Ach ja – das Beispiel zeigt übrigens auch, dass man Äpfel und Birnen sehr wohl addieren kann. Ihnen bleibt nun nur noch herauszufinden, was man wohl mit dem Vektor $\vec{v} = -4\vec{a}_1$ meinen könnte (wie wäre es denn mit "Apfellieferung"?) ...[4]

[4] Wer schon den Begiff des Dualraums kennt, identifiziert hier schnell die Preisliste des Supermarktes mit einer Linearform ω, und die Antwort $\omega(\vec{v})$ wäre dann an der Kasse in Euro zu entrichten. Klaro – wenn Sie Äpfel liefern, kriegen Sie dafür ein paar Euro.

3.2 Norm (Länge) ...

Pfeile können unterschiedliche Längen aufweisen. Der mathematische Längenbegriff von Vektoren ist der Begriff der Norm, und so ist sie definiert:

Defintion: Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ist eine **Norm** in V genau dann wenn

(1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ wobei $\|\vec{v}\| = 0$ nur genau dann, wenn $\vec{v} = o$.

(2) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Ein Vektor $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ heißt **Einheitsvektor**. Ist ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, sagt man V sei ein **normierter** Vektorraum, notiert $(V, \|\cdot\|)$. Ein normierter Vektorraum ist immer auch ein metrischer Raum: die mit $d(\vec{u}, \vec{v}) := \|\vec{u} - \vec{v}\|$ definierte Abbildung genügt den Axiomen einer Metrik! Man sagt, die Norm (des Vektorraums V) *induziere* ein Metrik (auf der Grundmenge V).

Der Norm eines Vektors entspricht die Länge seiner Pfeildarstellung in der Euklidischen Geometrie, und Längen sind positiv, was in (1) zum Ausdruck gebracht wird. Strecken (oder Stauchen) bedeutet nach (2) verlängern bzw. verkürzen. Und in (3) ist die Elementarweisheit für ein Dreieck ausgedrückt, dass nämlich im Dreieck jede Seite kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Beispiel: Der Vektorraum(!) $\mathbb{R}^n$ ist mit

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2} \tag{3.10}$$

ein normierter Vektorraum (Beweis: Übung).

Vom Begriff der "Länge" (eines Pfeils, eines Weges) ist der Begriff des "Abstands" (zweier Punkte) zu unterscheiden:

Definition: Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist eine **Metrik** in M, genau dann wenn

(Met1) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$

(Met2) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$

(Met3) $d(x, y) = d(y, x)$

(Met4) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Man nennt $d(x, y)$ auch den **Abstand** der beiden Punkte $x, y \in M$, entsprechend d eine *Abstandsfunktion*. Ist auf einer Menge M eine Metrik d eingeführt, sagt man M sei ein **Metrischer Raum**, zuweilen notiert (M, d).
Die Axiome (1)–(3) kodieren den intuitiven Abstandsbegriff: Abstände sind positiv (niemand würde die Aussage "Der Abstand von Berlin und Potsdam beträgt Minus-Sieben-Meilen" verstehen), der Abstand zwischen Potsdam und Potsdam ist Null, der Abstand von Potsdam und Berlin ist der gleiche wie der Abstand von Berlin und Potsdam. Axiom (4) nennt man auch **Dreiecksungleichung**: der Abstand je zweier Punkte eines Dreiecks ist immer kleiner gleich der Summe der Abstände der beiden Punkte zum dritten Punkt.

3.3 ... und Skalarprodukt (Winkel)

Definition: Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ein **Skalarprodukt** genau dann wenn

(1) $g(\vec{u}, \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 g(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 g(\vec{u}, \vec{v}_2)$ und $g(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 g(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 g(\vec{u}_2, \vec{v})$ (g ist **bilinear**)

(2) $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$ (g ist **symmterisch**)

(3) $g(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$ und $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ nur für $\vec{v} = o$ (g ist **nicht ausgeartet**)

Ist ein reeller(!) Vektorraum mit einem Skalarprodukt versehen, redet man von einem **Euklidischen Vektorraum**, pedantisch notiert (V, g). Statt $g(\vec{u}, \vec{v})$ notiert man das Skalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auch gerne $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, oder noch kürzer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Wir benutzen – sofern nicht anders gesagt – die Punktnotation.

Das Skalarprodukt in komplexen Vektorräumen genügt ähnlichen Axiomen: (1a) und (3) unverändert, (2) wird ersetzt durch $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})^*$, und (1b) entsprechend $g(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1^* g(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2^* g(\vec{u}_2, \vec{v})$ (das Sternchen bedeutet Komplex-Konjugation). Ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt firmiert auch unter der Bezeichnung **unitärer** Vektorraum, und man sagt, das Skalarprodukt sei **Hermitesch** (statt symmetrisch), und **sesqulinear** (statt blinear).

Die Abbildung $\vec{v} \mapsto \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ genügt den Normaxiomen, daher ist

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,. \tag{3.11}$$

eine Norm für $(V, \cdot)$.

Aus der Elementargeometrie ist Ihnen der Satz des Pythagoras vertraut: in einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der

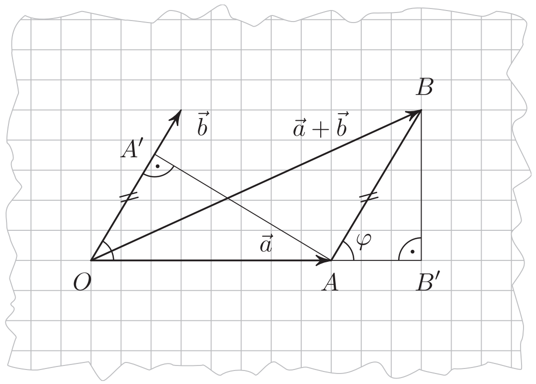


Abb 3.4 *Geometrsiche Deutung des Skalarprodukts im Kosinussatz.*

Quadrate über den beiden Katheten, $c^2 = a^2 + b^2$. Ein Korellar ist der *Kosinussatz*: $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi)$ worin φ der durch a und b gegebenen Außenwinkel (? muss ich noch richtig bezeichnen).

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) && (3.12)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u} && (3.13)\\ &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} && (3.14)\end{aligned}$$

Vergleich mit dem Kosinussatz der Geometrie

$$\vec{u}\cdot\vec{v} =: \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\varphi \tag{3.15}$$

worin φ der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildete Winkel. Entsprechend heißen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Hat man einen Vektor $\vec{u}$, lässt sich jeder andere Vektor $\vec{v}$ zerlegen $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, worin $\vec{v}_\perp$ senkrecht auf $\vec{u}$, und $\vec{v}_\parallel$ Vielfaches von $\vec{u}$, genauer $\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$, und $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel$. Die Zerlegung ist eindeutig.

Die Darstellung eines Vektors in einem Euklidischen Vektorraum erfolgt meistens bezüglich einer sog **Orthonormalbasis**, d.h. einer Basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ mit

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{3.16}$$

Seien nun $\vec{v}$ und $\vec{u}$ zwei Vektoren, nach der Orthonormalbasis entwickelt $\vec{v} = \vec{e}_i v^i$ und $\vec{u} = \vec{e}_i u^i$, erhält man für ihr Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{e}_i v^i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n \vec{e}_j v^j\right) = \sum_{ij} v^i u^j \underbrace{(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)}_{=\delta_{ij}} \\ &= v^1u^1 + v^2u^2 + \cdots + v^nu^n\,. && (3.17)\end{aligned}$$

bzw. mit Einstein'scher Summenkonvention kurz und bündig $\vec{u}\cdot\vec{v} = \delta_{ij}u^i v^j$. Was Ihnen ihr in Form der δ_{ij} begegnet ist die **Euklidische Metrik** – genauer: die Komponenten der Euklidischen Metrik in einer Orthormalbasis.

3.4 Kreuzprodukt (Fläche) . . .

Geometrisch bestimmen zwei linear unabhängige Vektoren im Euklidischen Vektorraum ein **Parallelogramm** im Euklidischen Punktraum. Mit f der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist das **Kreuzprodukt** der beiden Vektoren in einem dreidimensionalen(!!) Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ definiert

$$\vec{a}\times\vec{b} = f\vec{e}, \qquad f = ab\sin\varphi \tag{3.18}$$

worin $\vec{e}$ derjeinige Einheitsvektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ aund $\vec{b}$ steht und zusammen mit $\vec{a},\vec{b}$ ein sog. **Rechtssystem** bildet (mit der rechten Hand den Zeigefinger Richtung $\vec{a}$, den Mittelfinger Richtung $\vec{b}$, den Daumen Richtung $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$).[5]

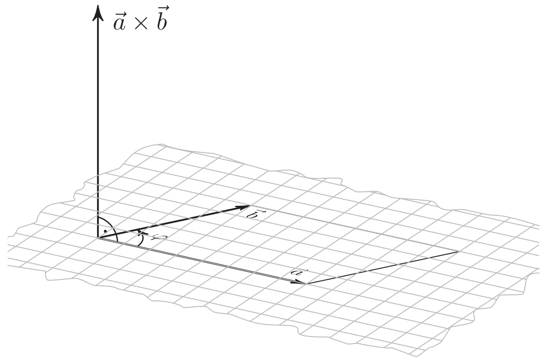


Abb 3.5 *Geometrsiche Deutung des Kreuzprodukts.*

Die Auszeichnung eines Rechtssystems (anstelle eines Linkssystems) ist äquivalent der Entscheidung für eine von zwei möglichen *Orientierungen* eines Flächenstücks. Ohne Orientierung könnten Sie zwei verschiedene Vektoren $\vec{e}$ und $-\vec{e}$ angeben, die beide auf der gegebenen Fläche senkrecht stehen.

Dass wir hier überhaupt eine Alternative haben, bedeutet mathematisch, dass das Kreuzprodukt nicht kommutativ, sondern **anti-kommutativ**, zuweilen auch genannt *antisymmetrisch*

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \tag{3.19}$$

[5] In höherdimensionaln Vektorräumen ist das orthogonale Kompläment zweier Vektoren nicht ein- sondern mehrdimensional.

und das wiederum bedeutet

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}\,, \tag{3.20}$$

denn der $\vec{o}$-Vektor ist der einzige Vektor für den gilt $-\vec{o} = \vec{o}$.

Das Kreuzprodukt ist **distributiv**

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{3.21}$$

aber **nicht assoziativ**,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})\,, \tag{3.22}$$

genannt **Entwicklungssatz**, den man sich vielleicht als "bac-cab" Regel einprägt. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes () und der Antikommutativität () beweist man nun schnell die sog. **Jacobi-Identität**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0\,. \tag{3.23}$$

Das Kreuzprodukt wurde bislang rein geometrisch formuliert, d.h. ohne Bezug auf ein konkretes Vektorraum-Koordinatensystem, ohne Bezug auf eine Basis. Bei den meisten Anwendungen in der Physik sind Vektoren aber über ihre Komponenten in einer irgendwie gewählten Basis gegeben. Und die beliebteste Basis in der Physik ist eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, worin nun neben $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ die zusätzliche Festlegung

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3\,, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1\,, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \tag{3.24}$$

den Vektorraum $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ mit Orientierung := +1 orientiert.[6]

[6] Mit dieser Festlegung wäre beispielsweise die Basis $\mathcal{B}' = (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ negativ orientiert: die Determinante des Vektrorraumendomorphismus, die den Basiswechsel $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$ vermittelt, hat den Wert -1.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist dann

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i a^i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j b^j\right) &= \sum_{ij} a^i b^j \vec{e}_i \times \vec{e}_j \\ &= a^1b^1\vec{e}_1\times\vec{e}_1 + a^1b^2\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + \ldots + a^3b^2\vec{e}_3\times\vec{e}_2 + a^3b^3\vec{e}_3\times\vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1\left(a^2b^3 - a^3b^2\right) - \vec{e}_2\left(a^1b^3 - a^3b^1\right) + \vec{e}_3\left(a^1b^2 - a^2b^1\right) \qquad (3.25)\end{aligned}$$

bzw. in Spaltenvektornotation

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{pmatrix} . \qquad (3.26)$$

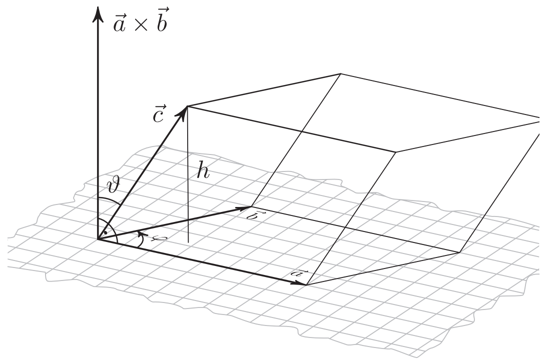


Abb 3.6 *Geometrsiche Deutung des Spatprodukts.*

3.5 ... und Spatprodukt (Volumen)

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ definieren ein **Parallelepiped** $\mathrm{Spat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, weniger zungenbrecherisch genannt *Spat*. Der Spat ist ein geometrischer Körper, dessen Volumen Vol gegeben ist "Grundfläche f mal Höhe h", kurz Vol $= fh$. Welche Seite (engl. *face*) dabei als "Grundfläche" fungiert ist ganz beliebig, wir wählen die von $\vec{b}, \vec{c}$ gebildete Fläche. Grundfläche ist dann $f = \|\vec{b} \times \vec{c}\|$. "Höhe" ist die Projektion von $\vec{a}$ auf den Flächennormaleneinheitsvektor, $h = \left|\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{f}\right|$, wobei der Betrag garantiert, dass "Höhe" nicht negativ. Das Volumen des Spats ist demnach gegeben

$$\mathrm{Vol}[\mathrm{Spat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})] = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right| . \qquad (3.27)$$

Das hier auftretende gemischte Produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ nennt man aus naheliegenden Gründen das **Spatprodukt**. Das Spatprodukt **additiv** und **homogen** in jedem Faktor, beispielsweise

$$\vec{a}\cdot((\vec{b}+\vec{v})\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{v}\times\vec{c}) \quad \text{(additiv)} \tag{3.28}$$

$$\vec{a}\cdot((\lambda\vec{b})\times\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})) \quad \text{(homogen)} \tag{3.29}$$

und **alternierend** unter Vertauschung zweier beliebiger Faktoren, etwa

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) \tag{3.30}$$

Alternierend besagt, dass sich unter einem Austausch zweier Kantenvektoren zwar die **algebraische Orientierung** des Spats ändert, sein Volumen davon aber unberührt bleibt. Die algebraische Orientierung kennt zwei Werte $+1$ oder -1, entsprechend dem physikalischen "Rechtssystem" oder "Linkssystem". Da das Spatprodukt alternierend ist hat ein Spat mit zwei linear abhängigen Kantenvektoren das Volume Null, beispielsweise

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0\,. \tag{3.31}$$

Homogenität besagt, dass wenn ein spannender Kantenvektor mit einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht wird, sich das Spatvolumen mit einen entsprechenden Faktor ändert. Linearität und Antisymmetrie implizieren, dass das Volumen eines Spats **scherinvariant** ist, etwa

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\,. \tag{3.32}$$

Im übrigen bedeutet Beliebigkeit der Wahl der Grundfläche

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\,. \tag{3.33}$$

Den Ausdruck für das Spatprodukt $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ erhählt man, indem in Gl. (3.25) die $\vec{e}_i$ durch u^i ersetzt werden,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = a^1\left(b^2c^3-b^3c^2\right) - a^2\left(b^1c^3-b^3c^1\right) + a^3\left(b^1c^2-b^2c^1\right) \tag{3.34}$$

Das Spatprodukt lässt sich auch mittels der sog. *Determinante* ausdrücken,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \equiv \det \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Das 3×3 rechteckige Zahlenschema nennt man eine *Matrix*. Wie sich die Determinante einer solchen 3×3-Matrix berechnet, läßt sich aus (3.34) ablesen. Was Matrizen und Determinaten genau sind, wird in den nächsten Vorlesungen geklärt.

3.6 Aufgaben

▷ **Aufgabe 3-1**

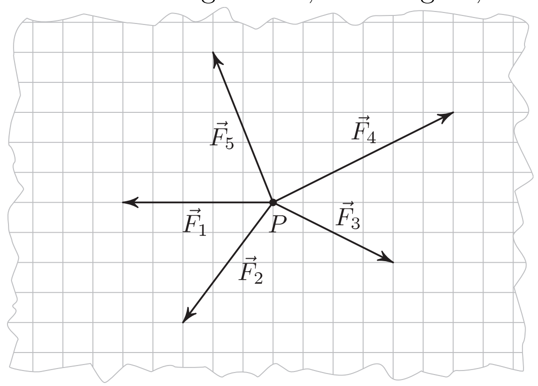
Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum stets nur einen Nullvektor gibt.

▷ **Aufgabe 3-2**

Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum zu jedem $\vec{v}$ stets nur ein $-\vec{v}$ gibt.

▷ **Aufgabe 3-3**

Die Abbildung zeigt fünf Kräfte, die an einem Punkt P angreifen. Bestimmen Sie (1) zeichnerisch, (2) arithmetisch die Gegenkraft, die nötig ist, um P n Ruhe zu halten.



▷ **Aufgabe 3-4**

Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz der Vektoralgebra: Ist $\mathcal{B} := (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V, dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ so dass

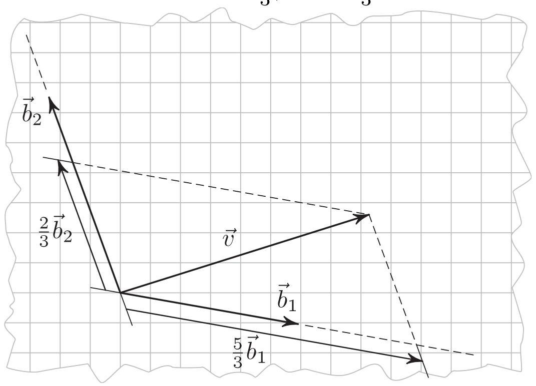
$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \,. \tag{3.36}$$

Bemerkung 1: Um die Bestimmtheit der λ_i durch den Vektor $\vec{v}$ auszudrücken, schreibt man statt λ_i gerne v_i (bzw. v^i in dem von uns bevorzugten Ricci-Kalkül), und nennt die v^i die *Komponenten* von $\vec{v}$ (obwohl es sich eigentlich um Koordinaten handelt. Komponenten sind selber Vektoren – ein Vektor hat Komponenten – und die v^i sind schlicht Zahlen und keine Vektoren. Na ja – so ist das halt mit den Fachsprachen. Die sind auch nicht immer konsistent.)

Bemerkung 2: Angesichts des hier bewiesenen Befundes sind alle n-dimensionalen reellen Vektorräumer isomorph dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Oder – noch prägnanter – eigentlich gibt es nur einen n-dimensionalen reellen Vektorraum, und das ist der $\mathbb{R}^n$.

▷ Aufgabe 3-5

Die Abbildung zeigt einen Vektor $\vec{v}$ und eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Bestätigen Sie zeichnerisch die Vektorkoordinaten $v^1 = \frac{5}{3}$, $v^2 = \frac{2}{3}$ von $\vec{v}$ in der Basis $\mathcal{B}$.



▷ Aufgabe 3-6

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden drei Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{3.37}$$

(b) Und wie sieht es mit folgenden drei Vektoren aus:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \tag{3.38}$$

▷ **Aufgabe 3-7**

Man bestimme die Norm der Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

ihr Skalarprodukt und den Winkel, den sie bilden.

▷ **Aufgabe 3-8**

Gegeben drei Vektoren (vgl. Aufgabe 3-6)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \tag{3.40}$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

▷ Aufgabe 3-9

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Berechnen Sie das Spatprodukt.
<u>Hinweis:</u> In Aufgabe 3-6 haben Sie schon gezeigt, dass diese drei Vektoren linear abhängig. Müssen Sie das Spatprodukt also wirklich ausrechnen, oder können Sie die Antwort gleich hinschreiben?

▷ Aufgabe 3-10

Es seien $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ Basisvektoren eines n-dimensionalen Euklidischen Vektorraums. Zeigen sie, dass die im **Erhard Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren** gebildeten Vektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

$$\vec{e}_1 := \frac{1}{\|\vec{b}_1\|}\vec{b}_1, \qquad \vec{e}_i := \frac{\vec{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{b}_i)\vec{e}_k}{\left\|\vec{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{b}_i)\vec{e}_k\right\|}, \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{3.42}$$

eine Orthonormalbasis von V, also eine Vektorraumbasis mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

▷ Aufgabe 3-11

Mittels Erhard-Schmidt'schem Orthogonalisierungsverfahren erzeuge man aus

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

eine Orthonormalbasis.

▷ Aufgabe 3-12

Unter einem Ortsvektor $\vec{x}$ versteht man einen Vektor, dessen Schaft in einem besonderen Punkt, dem "Ursprung" O befestigt ist, und dessen Spitze einen Raumpunkt P bezeichnet. Wählt man eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i$, fungieren die Komponenten x^1, x^2, x^3 des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{e}_i x^i$ als kartesische Koordinaten von P. Dabei zeigt $\vec{e}_1$ vereinbarungsgemäß in Richtung der X-Achse, $\vec{e}_2$ in Richtung der Y-Achse, und $\vec{e}_3$ in Richtung der Z-Achse. Die Komponenten von $\vec{x}$ schreibt man dann auch x, y, z statt des verwirrenden x^1, x^2, x^3.

Hat man nun eine Vektorgleichung, beispielsweise $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$, bestimmen deren Lösungen ein geometrisches Objekt. Im Falle $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$ sind alle Ortvektoren $\vec{x}$ Lösung, die senkrecht auf $\vec{e}_3$ stehen. Das sind aber alle diejenigen Ortsvektoren, deren Z-Komponente gleich Null, und die Endpunkte dieser Vektoren bilden eine Ebene, die XY-Ebene!

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x}| = 1$ bestimmt?

(b) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ bestimmt, wobei $\vec{x}_0$ fester Ortsvektor und R ein festes Skalar?

(c) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ bestimmt, wobei $\vec{e}$ fester Einheitsvektor?

(d) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ bestimmt, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ feste Vekoren?
Hinweis: Eigentlich sind das drei Gleichungen. Warum?

(e) Überzeugen Sie sich davon, dass mit $\vec{x} \cdot \vec{k} = k^2$ für festes $\vec{k}$ und $k = |\vec{k}|$ der Betrag von $\vec{k}$ die Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ im Abstand k vom Ursprung ausgezeichnet ist.

Der Duck einer Schallwelle kann in der Form $p(\vec{x}, t) = p_0 + f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ angegeben werden, worin f irgendeine "schöne" Funktion (nicht unbedingt Sinus oder Cosinus).

(f) Bestimmen Sie die Orte an denen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 der Druck $p_0 + f(0)$ herrscht.

(g) Wie bewegt sich das in (f) bestimmte geometrische Objekt, und welches ist gegebenenfalls seine Geschwindigkeit?

Bemerkung: In (f) und (g) begegnet Ihnen ein wichtiges physikalisches Konzept – die *ebene Welle*. Warum die wohl "eben" heißt?