Kapitel 4

Lineare Abbildung

Körper lassen sich im Raum verschieben, drehen, und – falls es sich um einen elastischen Körper handelt – skalieren (d.h. komprimieren bzw expandieren), scheren und gar verdrillen. Verschieben, Drehen und Scheren sind Euklidisch parallelentreu, d.h sie lassen sich auch als Abbildung im Euklidischen Vektorraum fomulieren. Die **Verschiebung**, beispielsweise, kann dargestellt werden $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{a}$,worin $\vec{a}$ irgendein fester Vektor – der *Verschiebungsvektor*. Eine **Skalierung** $\vec{v} \mapsto \lambda\vec{v}$, worin $\lambda \in \mathbb{R}$ irgendeine feste Zahl – der *Skalenfaktor*. Eine **Scherung** $\vec{v} \mapsto (v^1 + \sigma v^2)\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2$, wobei $\vec{e}_1$ Vektor in Richtung der Scherachse, und $\sigma \in \mathbb{R}$ irgendeine feste Zahl – das *Schermodul*. Unter einer **Drehung** schließlich wird ein Vektor $\vec{v} = \vec{e}_1 v^1 + \vec{e}_2 v^2$ abgebildet auf $\vec{v}' = \vec{e}_1 v'^1 + \vec{e}_2 v'^2$ mit $v'^1 = \cos\varphi v^1 + \sin\varphi v^2$, $v'^2 = -\sin\varphi v^1 + \cos\varphi v^2$.

Offensichtlich gilt für die genannten Abbildung – mit Ausnahme Verschiebung – dass sie den Nullvektor auf den Nullvektor abbilden, und ansonsten einem verdoppelten Vektor das Doppelte des Bildes des ursprünglichen Vektors, und einer Vektorsumme die Summe der Bilder der einzelnen Summanden zuweisen. Derartige Abbildungen fallen in der Mathematik unter den Begriff "linear". Einer alten Weisheit zufolge braucht man Vektorräume eigentlich nur für die linearen Abbildungen, die man auf ihnen vornehmen kann ...

4.1 Vektorraumhomomorphismen

Definition "Vektorraumhomomorphismus": Seien V, W jeweils $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $A : V \to W$ konstituiert einen Vektorraumhomomorphismus, genau dann wenn

$$A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{u}) = \lambda A(\vec{v}) + \mu A(\vec{u}) \tag{4.1}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}, \vec{u} \in V$.

Vektorraumhomomorphismen sind also insbesondere **linear** – sie bilden Linearkombinationen auf Linearkombinationen ab. Daher laufen Vektorraumhomorphismen auch zuweilen unter der Kennzeichnung **lineare Abbildung**.[1]

Beim Studium von Vektorraumhomomorphismen $A : V \to W$ sind folgende Begriffe nützlich

$$\mathrm{Bild}(A) := \{A(\vec{v})|\vec{v} \in V\} \subset W, \text{ ein Untervektorraum von } W$$

[1] Homomorphismen begegnen einem in der Mathematik aller Orten. Ihren diversen Ausprägungen gemein ist, dass sie die Rechenregeln respektieren, die für die zugrundeliegenden Mengen vereinbart wurden. Je nach Eigenschaft werden Vektorraumhomomorphismen klassifiziert. Ein Vektorraumhomomorphismus $A : V \to W$ heißt **Monomorphismus**, wenn A injektiv, **Epimorphismus**, wenn A surjektiv, **Isomorphismus**, wenn A injektiv und surjektiv, also bijektiv, **Endomorphismus**, wenn $V = W$, **Automorphismus**, wenn $V = W$ und A bijektiv. Hatte ich schon erwähnt, dass das Studium der Mathematik dem Erlernen einer Fremdsprache entspricht?

$$\mathrm{Kern}(A) := \{\vec{v} \in V | A(\vec{v}) = \vec{o}\} \subset V, \text{ ein Untervektorraum von } V$$

$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Bild}(A))$, der **Rang** von A. Damit die Dimensionsformel für Vektorraumhomomorphismen

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(V)\,. \tag{4.2}$$

Vektorraumhomomorphismen können "verkettet" werden. Hat man beispielsweise einen Vektorraumhomomorphismus $A : V \to W$ und einen Vektorraumhomomorphismus $B : W \to Y$, so ist mit $C := B \circ A$ (Reihenfolge beachten!) ein Vektorraumhomomorphismus $C : V \to Y$ verabredet.

Sofern Urbild- und Bildraum isomorph, insbesondere also von gleicher Dimension, und $A : V \to W$ von vollem Rang, $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(V)$, kann A invertiert werden. Das Inverse von A wird dann notiert A^{-1}, wobei $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = \mathrm{id}_V$ mit id_V der Vektorraumautomorphismus "Identität", $\mathrm{id}_V(\vec{v}) = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$. Für die Verkettung zweier invertierbarer Abbildungen gilt dann der wichtige Satz

$$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}\,. \tag{4.3}$$

Kurz: bei der Inversion einer Verkettung ist auch die Reihenfolge der Glieder zu invertieren.

Brot und Butter linearer Abbildungen in der Physik sind die Endomorphismen $V \to V$. Die Menge aller Endomorphismen, bezeichnet $\mathrm{Hom}(V, V)$, versehen mit der Vorschrift "Abbildungs-Skalarmultiplikation" $(\lambda A)(\vec{v}) = \lambda A(\vec{v})$, und "Abbildungs-Addition" $(A+B)(\vec{v}) = A(\vec{v}) + B(\vec{v})$ bildet ihrerseits einen Vektorraum der Dimension $[\dim(V)]^2$ (Beweis: Übungen). Witzig – oder? Man fängt mit einem einfachen Vektorraum an – und Schwupsi-Wupsi hat man noch einen …

Darüberhinaus können die "Vektoren" (lineareAbbildungen) aus $\mathrm{Hom}(V, V)$ auch verkettet werden, ohne aus der Menge $\mathrm{Hom}(V, V)$ rauszufliegen. Diese Verkettung ist assoziativ, distributiv aber nicht kommutativ, $AB \neq BA$. Die Differenz $AB - BA$ heißt der **Kommutator** $[A, B]$ von A und B. Nicht-triviale Kommutatoren bilden das Herz der Quantenmechanik.

Die Teilmenge der invertierbaren Abbildungen aus $\mathrm{Hom}(V, V)$, versehen mit der Verknüpfung “Verkettung”, und Auszeichnung eines Neutralelements id_V, bilden eine **Gruppe**, genannt die *generell lineare Gruppe über* V, bezeichnet $GL(V)$. Was immer auch V sein mag – die Hoffnung ist, dass die entsprechende $GL(V)$ die Mutter einer “Theorie-of-Everything” (TOE).

4.2 Matrixdarstellung

Ein irgendwie gegebener Vektorraumhomomorphismus $A : V \to W$ ist durch die Bilder einer V-Basis vollständig charakterisiert. Seien nämlich $\vec{b}_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$ Basisvektoren eines n-dimensionalen Vektorraums V, und $\vec{c}_\mu \in \mathcal{C}$, $\mu = 1, \ldots, m$ Basisvektoren im m-dimensionalen Zielvektorraum W.[2] Dann ist das Bild $A(\vec{b}_i)$ des i-ten Basisvektors von V ein Vektor in W, und also ein Linearkombination von Basisvektoren aus W, $A(\vec{b}_i) = \vec{c}_\mu A^\mu{}_i$ (Einstein'sche Summenkonvention), wobei die Koeffizienten $A^\mu{}_i$ die lineare Abbildung A vollständig beschreiben.[3] Die Abbildung eines allgemeinen Vektors $\vec{v} = \vec{b}_i v^i$ kann nun – der Linearität von A sei Dank – leicht angegeben werden $\vec{v} \mapsto \vec{w} = \vec{c}_\mu A^\mu{}_i v^i$, notiert für die Entwicklungskoeffizienten w^μ des Bildvektors $\vec{w} = \vec{c}_\mu w^\mu$

$$w^\mu = A^\mu{}_i v^i \,, \qquad \mu = 1 \ldots, m \,. \tag{4.4}$$

[2]Dass wir hier die Basis von V mit einem lateinischen Buchstaben i abzählen, die Basis von W hingegen mit einem griechischen Buchstaben hat keinerlei mathematische Bedeutung, sondern dient der schnellen Identifizierung “wo jemand hingehört” (ob zu V oder zu W).

[3]Dabei ist allerdings zu beachten, dass die numerischen Wert der $A^\mu{}_i$ von den gewählten Basen abhängen: andere Basen, andere Werte (siehe unten, Gl. (4.12)).

Gelobt sei die Einsteinsche Summenkonvention.

Diese Kurzschreibweise ist für allgemeine Überliegungen nützlich, für konkrete Rechnungen aber ein Albtraum. "Konkrete Rechnung" heißt, dass die Gesamtheit der ${A^\mu}_i$ als $m \cdot n$ Zahlen vorliegen, und man wissen will, welche Werte die m Zahlen w^μ für eine gegebene Gesamtheit von n Zahlen v^i annehmen. Für solcherart Rechnungen wird (4.4) gerne in einer sog. **Matrixschreibweise** notiert,

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 & \dots & {A^1}_n \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 & \dots & {A^2}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A^m}_1 & {A^m}_2 & \dots & {A^m}_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}_{\text{Die } m\times n\text{-Matrix } \underline{A} \equiv ({A^\mu}_j)} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{4.6}$$

wobei die Berechnungsvorschrift aus (4.4) abgelesen werden kann: Kippe die Zahlenspalte rechts in die Waagrechte, lege sie über die μ-te Zeile, summiere die Produkte der übereinanderliegenden Zahlen – und das Resultat ist der μ-te Eintrag der Zahlenspalte links. Exakt die gleiche Notation begegnet einem auch wenn man eine Matrixdarstellung von Vektoren und linearen Abbildungen aufsucht – vgl. Ergänzungsbox auf dem Rand.

Eine rechteckiges Zahlenschema, wie in (4.6), bestehend aus m Zeilen und n Spalten, nennt man eine $m \times n$-**Matrix**. Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, wieviele Zeilen und Spalten gemeint sind, schreibt man hier einfach $\underline{A} = ({A^i}_j)$, wo links der Name der Matrix, und rechts die Bezeichnung ihrer Elemente. Später werden wir Matrizen kennenlernen wo die Hoch-/Tiefstellung der Indices eine andere ist. In jedem Fall soll gelten, dass der zuerst genannte Index immer den Zeilenindex benennt.

Die mit Abstand schönsten Matritzen sind natürlich die Null-Matrix $\underline{0}$ kurz gefolgt

Alle n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume sind isomorph dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ der Zahlenspalten. Beweis gefällig? Einen Isomorphismus – eine **Matrixdarstellung** – vermittelt $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$, für eine V-Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b}_i\}_{i=1}^n$ erklärt $\varphi_{\mathcal{B}}(\vec{b}_i) = \underline{e}_i$, wo $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$, vgl. (3.7). Das Bild eines gegebenen V-Vektors $\vec{v} = \vec{b}_i v^i$ unter der Matrixdarstellung $\varphi_{\mathcal{B}}$ ist die Zahlenspalte $\varphi_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} =: \underline{v}$. Für einen Homomorphismus $A : V \to W$ erhält man die Matrixdarstellung von $\vec{w} = A\vec{v}$ bzgl W-Basis $\mathcal{C}$ und V-Basis $\mathcal{B}$ via: (1) von links mit $\varphi_{\mathcal{C}}$, (2) zwischen A und $\vec{v}$ die Identität $\mathrm{id}_V = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\varphi_{\mathcal{B}}$ einschieben, (3) genießen $\underline{w} = \underline{A}\underline{v}$ mit

$$\varphi_{\mathcal{C}} \circ A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} =: \underline{A} \tag{4.5}$$

die in (4.6) angegebene Matrix.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ {\scriptstyle \varphi_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\underline{A}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Abb 4.1 *Das kommutative Diagramm zu Gl. (??).*

von der **Einheitsmatrix**,

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

deren Matrixelemente man gerne mittels **Kronecker-Delta** notiert, $\underline{1} = (\delta^i_j)$,

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.8}$$

Die Verkettung eines Vektorraumhomomorphismus $\underline{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit einem Vektorraumhomomorphismus $\underline{B} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$, also die Abbildung $\underline{C} := \underline{B} \circ \underline{A}$, liest sich in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} C^1{}_1 & \dots & C^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C^l{}_1 & \dots & C^l{}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1{}_1 & \dots & B^1{}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^l{}_1 & \dots & B^l{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m{}_1 & \dots & A^m{}_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

mit der Rechenvorschrift der sog. **Matrixmultiplikation**: Kippe die j-te Spalte die Matrix $\underline{A}$ über die a-te Zeile der Matrix $\underline{B}$, summiere die Produkte der übereinanderliegenden Zahlen – das Resultat ist das Element $C^a{}_j$ der Matrix $\underline{C}$.

Die Subskripts in Gl. (4.6) sind Erinnerungshilfen, dass ein Vektor bzw eine Abbildung nicht mit seinem bzw ihrem Darsteller zu verwechseln ist. Andere Basis – anderer Darsteller. Einem Vektor bzw einer Abbildung ist es ziemlich Schnuppe in welcher Basis man arbeitet. Im übrigen sei darauf hingewiesen, dass nicht jede Zahlenspalte Darsteller eines Vektors, und nicht jedes rechteckige Zahlenschema Darsteller einer linearen Abbildung. So sind beispielsweise die vier Zahlen “Alter, Größe, Bundweite, Postleitzahl", angeordnet in einer Zahlenspalte, a-priori kein Darsteller eines Vektors. Und auch wenn man diese vier Zahlen in einer 2×2-Matrix anordnet, schaut man wohl nicht auf eine lineare Abbildung. Nur solche Zahlenspalten bzw rechteckigen Zahlenschemata die sich "in wohlbestimmter Art und Weise" unter einem Basiswechsel transformieren qualifizieren sich als legitime Darsteller von Vektoren bzw Abbildungen. Aber – was ist nun diese "wohlbestimmte Art und Weise"?

Alice arbeitet mit Basisvektoren $\vec{b}_i$ im Vektorraum V und $\vec{c}_\mu$ im Vektorraum W. Bob wählt Basisvektoren $\vec{b}_{i'}$ im Vektorraum V und $\vec{b}_{\mu'}$ im Vektorraum W. Alice kann ihre Basisvektoren als Linearkombination der Bob'schen Basisvektoren angeben,

$$\vec{b}_i = \vec{b}_{i'} J^{i'}_{\ i} \,, \qquad \vec{c}_\mu = \vec{c}_{\mu'} J^{\mu'}_{\ \mu} \tag{4.10}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\varphi_{\mathbb{B}}"'] & V \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\underline{J}"] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi^{-1}_{\mathbb{B}'}"'] \end{tikzcd}$$

Abb 4.2 *Das kommutative Diagramm zum Basiswechsel im Vektorraum.*

Ein gegebener Vektor $\vec{v} \in V$ wird von Alice notiert $\vec{v} = \vec{b}_i v^i$, von Bob $\vec{v} = \vec{b}_{i'} v^{i'}$, und da sich beide auf den gleichen Vektor beziehen, lassen sich die Vektorkoordinaten ineinander umrechnen,

$$v^{i'} = J^{i'}_{\ i}\, v^i \,, \qquad w^{\mu'} = J^{\mu'}_{\ \mu}\, w^\mu \,. \tag{4.11}$$

Die hier eingeführte Matrix $\underline{J} = (J^{i'}{}_i)$ nennt man **Jacobimatrix**.

Die Wirkung eines Vektorraumhomomorphismus $A : V \to W$ notiert Alice $A(\vec{b}_i) = \vec{c}_\mu A^\mu{}_i$, entsprechend Bob $A(\vec{b}_{i'}) = \vec{c}_{\mu'} A^{\mu'}_{\ i'}$, mit Blick auf (4.11) demnach $\vec{c}_{\mu'} A^{\mu'}_{\ i'}\, J^{i'}_{\ i} = \vec{c}_\mu A^\mu{}_i$, und mit weiterem Blick auf (4.11)

$$A^{\mu'}_{\ i'}\, J^{i'}_{\ i} = J^{\mu'}_{\ \mu}\, A^\mu{}_i \tag{4.12}$$

womit die "wohlbestimmte Art und Weise" bestimmt ist.

Insbesondere für einen Vektorraumendomorphismus $A : V \to V$, mit der Vereinbarung $\underline{A}$ "Darstellung in Basis $\vec{b}_i$" und $\underline{A}'$ "Darstellung in Basis $\vec{b}_{i'}$

$$\underline{A}' = \underline{J}\; \underline{A}\; \underline{J}^{-1} \tag{4.13}$$

Ganz allgemein nennt man für invertierbare Matrix $\underline{S}$ die Abbildung $\underline{A} \mapsto \underline{A}' = \underline{S}\ \underline{A}\ \underline{S}^{-1}$ eine **Ähnlichkeitstransformation**. Merken an dieser Stelle sollte man sich "Basiswechsel induziert Ähnlichkeitstransformation mit der Jacobimatrix".

4.3 Adjungierte

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist jedem Endomorphismus A via

$$\langle \vec{u}, A^\dagger(\vec{v}) \rangle := \langle A(\vec{u}), \vec{v} \rangle \tag{4.14}$$

ein Endomorphismus $A^\dagger$ zugeordent, genannt der **Adjungierte** von A. Gilt $A^\dagger = A$ so heißt A **selbstadjungiert**.

Aus der definierenden Gleichung folgt für das Adjungierte einer Verkettung

$$(A \circ B)^\dagger = B^\dagger \circ A^\dagger \tag{4.15}$$

was stark an die Inversion einer Verkettung erinnert, $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$.

In einer Darstellung im $\mathbb{K}^n$ mit Standardbasis und -Skalarprodukt bezeichnet $\underline{A}^\dagger$ die zur Matrix $\underline{A}$ adjungierte Matrix. Ihre Elemente lassen sich leicht aus (4.14) ablesen

$$A^{\dagger i}{}_j = A^j{}_i{}^* . \tag{4.16}$$

Im Matrizenbild bedeutet das "Spiegeln an der Diagonalen und konjugiert-komplex nehmen". Spiegeln an der Diagonalen nennt man auch **Transposition**, und da im reellen Vektorraum Komplex-Konujgation entfällt ist in solchen Vektorräumen die Adjungierte gleich der Transponierten. Ist A selbstadjungiert, heißt $\underline{A} = \underline{A}^\dagger$ mit $A^i{}_j = A^j{}_i{}^*$ **Hermitesch**. Hat man es mit einem reellen Vektorraum zu tun, heißt $\underline{A} = \underline{A}^T$ mit $A^i{}_j = A^j{}_i$ **symmetrisch**. Symmetrische Matrizen sind das Brot und Butter der Physik. Der Trägheitstensor, beispielsweise, aber auch der Dielektrizitätstensor werden häufig mit symmetrischen Matrizen dargestellt.

4.4 Unitäre und Orthogonale

Ein Endomorphismu U unter dem das Skalarprodukt invariant ist, $\langle U(\vec{u}), U(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ heißt **unitär** falls V komplexer Vektorraum, und **orthogonal** falls V reeller Vektorraum. Mit Blick auf (4.14) gilt für unitäre Endomorphismen

$$U^\dagger U = \mathrm{id}_V \qquad \text{bzw.} \qquad U^\dagger = U^{-1}\,, \tag{4.17}$$

und analog für orthogonale

$$R^T R = \mathrm{id}_V \qquad \text{bzw.} \qquad R^T = R^{-1}\,. \tag{4.18}$$

Eine lineare Abbildung, die das Skalarpodukt in einem Euklidischen Vektorraum respektiert, respektiert immer auch die Norm $\|R(\vec{v})\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, d.h. orthogonale Einheitsvektoren werden unter R auf orthogonale Einheitsvektoren abgebildet. Abbildungen diesen Typs definieren die **Isometrien** eines Eukldischen Vektorraums, und das sind zum einen die Spiegelungen, zum anderen die reinen Drehungen.

So sind beispielsweise im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die beiden Matrizen

$$\underline{R}_d = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \underline{R}_s = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

orthogonal. Die erste der beiden beschreibt eine reine Drehung (man mache sich das an einer Skizze klar), die zweite eine Spiegelung,[4] gefolgt von einer Drehung. Orthogonale Matrizen, die reine Drehungen beschreiben, heißen auch treffend **Drehmatrizen**. Drehmatrizen bleiben unter Matrixmultiplikation unter sich – sie bilden die sog. **speziell-orthogonale Gruppe** $SO(n)$. Das "speziell" bedeutet, dass die Determinante derartiger Matrizen den Wert 1 hat. Über Determinanten reden wir in der nächsten Vorlesung ...

[4] dargestellt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ für eine Spiegelung an der X-Achse.

4.5 Aufgaben

▷ **Aufgabe 4-1**

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

▷ **Aufgabe 4-2**

Sei V Vektorraum (etwa $V \simeq \mathbb{R}^3$), und $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ Abbildung von V auf V,

$$\mathcal{T}_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}\,, \tag{4.21}$$

mit $\vec{a} \in V$ fest.

(a) Die Abbildung läuft auch unter dem Begriff *Translation* (bzw. Verschiebung). Warum wohl?

(b) Ist $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ eine lineare Abbildung?

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{\mathcal{T}_{\vec{a}} | \vec{a} \in V\}$ versehen mit der Verknüpfung $\mathcal{T}_{\vec{a}} \circ \mathcal{T}_{\vec{b}} = \mathcal{T}_{\vec{a}+\vec{b}}$ bildet eine Gruppe, in Fachkreisen genannt *Translationsgruppe*. Ist die Gruppe abelsch? Was wäre das Neutralelement? Was wäre das zu $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ inverse Element?

▷ **Aufgabe 4-3**

In einem zwei-dimensionalen Vektorraum V sei eine lineare Abbildung $S : V \to V$ durch ihre Wirkung auf zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ erklärt

$$S(\vec{a}_1) = \vec{a}_1\,, \qquad S(\vec{a}_2) = s\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \tag{4.22}$$

Bestimmen Sie das Schicksal eines allgemeinen Vektors $\vec{v} = \vec{a}_1 v^1 + \vec{a}_2 v^2$ unter S. Sofern V der Vektorraum der Verschiebungsvektoren auf einem affinen Raum – welche geometrische Operation wird durch S beschrieben? Ist S flächentreu?

▷ Aufgabe 4-4

Ein Körper kreiselt um ein gewisse Achse $\vec{n}$ mit Kreisfrequenz ω. Man überzeuge sich, dass ein Körperkrümel, der sich zur Zeit t am Ort $\vec{r}(t)$ befindet, eine Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$ aufweist, wo $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$.

Für gegebenes $\vec{\omega}$ hängt $\vec{v}$ linear von $\vec{r}$ ab. Wie lautet die Matrixdarstellung der Gleichung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$?