Kapitel 5

Elemente der Matrizenrechnung

Die Untersuchung linearer Abbildungen, so die Moral des letzten Kapitels, ist Matrizenlehre: was man mit Matrizen alles so machen kann, und welche Eigenschaften sie aufweisen.

5.1 Rechenregeln

Die Gesamtheit aller $m \times n$-Matrizen können zu einer Menge zusammengefasst werden, bezeichnet $M(m{\times}n, \mathbb{K})$. Verabredet man für zwei beliebige Matrizen $(a^i{}_j), (b^i{}_j) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ via $(a^i{}_j) + (b^i{}_j) := (a^i{}_j + b^i{}_j)$ eine **Matrixaddtion**, und via $\lambda(a^i{}_j) := (\lambda a^i{}_j)$ eine **Matrix-Skalarmultiplikation**, erhält $M(m \times n, \mathbb{K})$ die Struktur eines $\mathbb{K}$-Vektorraums. Da sich der Vektorraum(!) $M(m \times n, \mathbb{K})$ nur durch die Schreibweise der Elemente – im Rechteck statt in einer hohen Spalte – vom $\mathbb{K}^{m \cdot n}$ unterscheidet, hat $M(m \times n, \mathbb{K})$, aufgefasst als Vektorraum, die Dimension mn.

Matrizen können auch untereinander mutlipliziert werden – allerdings nur, wenn sie zueinander "passen" – vgl. (4.9). Passend ist beispielsweise das Produkt $\underline{A}\,\underline{x}$ worin $\underline{A}$ eine $m \times n$-Matrix und $\underline{x}$ ein Spaltenvektor des $\mathbb{K}^n$ – also eine $n \times 1$-Matrix.

Auch passend $\underline{\omega}\,\underline{A}$, worin $\underline{\omega}$ eine $1 \times m$-Matrix, also ein m-komponentige Zahlenzeile, und $\underline{A}$ eine $m \times n$-Matrix. Das Resultat der Matrixmultiplikation $\overline{\omega}\,\underline{A}$ ist ein n-komponentige Zahlenzeile.

Nach den Regeln der Matrixmultiplikation kann man zwei Zahlenspalten des Vektorraum $\mathbb{K}^n$ nicht miteinander multiplizieren.[1]

In jedem Fall untereinander passfähig sind quadratische Matrizen. **Matrixmultiplikation** ist auf $M(n \times n, \mathbb{K})$ **assoziativ** und bezüglich Addtion **distributiv**. Sie ist aber weder kommutativ, noch nullteilerfrei. Dazu ein Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Das Produkt offenbart

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{5.2}$$

Weil hier das Produkt zweier von Null verschiedener Matrizen die Null-Matrix ergibt, sagt man Matrixmultiplikation sei nicht frei von Nullteilern (bei der gewöhnlichen Multiplikation impliziert $ab = 0$ entweder $a = 0$ oder $b = 0$). Vergleich mit dem Produkt

$$\underline{B}\,\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \underline{A}\,\underline{B} \tag{5.3}$$

[1] Zahlenspaltenprodukte werden erst in der nächsten Vorlesung eingeführt, Stichwort Skalarprodukt.

liefert: Matrixmultiplikation ist **nicht kommutativ**. Die Differenz

$$\underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} =: [\underline{A}, \underline{B}] \tag{5.4}$$

nennt man den **Kommutator** von $\underline{A}$ und $\underline{B}$. Unnötig darauf hinzuweisen, dass der Kommutator zweier $n \times n$-Matrizen eine $n \times n$-Matrix.

5.2 Rangsatz und elementare Umformungen

Hat man eine $m \times n$-Matrix $\underline{A}$ definiert die auch eine lineare Abbildung $\underline{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Unter dem **Matrixrang** versteht man die Dimension des Bildraums der so zugeordneten linearen Abbildung. Da die n Spalten von $\underline{A}$ genau die Bilder der n kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{K}^n$ ist der Rang genau die Zahl der linear unabhängigen Spalten, genannt der **Spaltenrang** der Matrix $\underline{A}$. Ebenso definiert die Dimension der linearen Hülle der Zeilen den **Zeilenrang**. Dabei gilt der wichtige

Satz (Rangsatz):

$$\mathrm{rg}(\underline{A}) := \dim(\mathrm{Bild}(\underline{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)) = \mathrm{Spaltenrang}(\underline{A}) = \mathrm{Zeilenrang}(\underline{A}) \tag{5.5}$$

(Ohne Beweis)

Es gibt Matrizen, denen kann man den Rang direkt ansehen. Betrachte etwa

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} {a^1}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {a^1}_n \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & {a^r}_r & \cdots & {a^r}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

worin alle Hauptdiagonalelemente ${a^r}_r \neq 0$, so ist $\mathrm{rg}(\underline{A}) = r$ (denn es gibt r Zeilen verschieden von der 0-Zeile, und die sind linear unabhängig).

Wenn es also gelingt, eine gegebenen $m \times n$-Matrix $\underline{A}$ mittels "rangerhaltender" Umformungen in eine Matrix $\underline{A}'$ von der Form (5.6) umzuformen wäre der Rang von $\underline{A}$ bestimmt.

Man unterscheidet drei Typen elementarer Umformungen, die den Rang einer Matrix erhalten:

Vertauschung zweier Zeilen (5.7)

Multikpliktion einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ (5.8)

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (5.9)

Ebenso sind rangerhaltende Umformungen die Spalten betreffend formuliert. Die genannten Zeilen- bzw Spaltenumformungen ändern die lineare Hülle der Zeilen bzw Spalten nicht, insbesondere nicht deren Dimension, also den Zeilen- bzw Spaltenrang, und daher wegen (5.5) auch nicht Rang der Matrix.

Hier nun das Rezept zur Rangermittlung: Zunächst stellt man – gegebenefalls duch Vertauschung von Zeilen oder Spalten – sicher, dass ${a^1}_1 \neq 0$. Dann addiert (bzw.

subtrahiert) man geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den verbleibenden Zeilen, wobei das Vielfache so gewählt wird, dass ${a^i}_1 = 0$ für alle $i = 2, \dots, m$. So macht man weiter bis man bei (5.6) landet.

5.3 Determinante

Die **Determinante** ist eine Abbildung (ja, ja – schon wieder), die jedem Endomorphismus $A : V \to V$ eine Zahl $\det(A)$ zuweist, wobei …wie bitte? Weitere Ausführungen verschieben wir auf später. Hier zunächst die klassische Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix $\underline{A} = ({A^i}_j)$.

$$\det(\underline{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} {A^i}_{\sigma(i)} \right) , \tag{5.10}$$

sog. **Leibniz-Formel**.[2]. Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen σ der symmetrischen Gruppe S_n vom Grad n. Das Signum einer Permutation ist $+1$ falls σ eine gerade Permutation, und -1 falls σ eine ungerade Permutation.

`[Permutationen schon eingeführt? Gruppe sollte auch irgendwann mal kommen ...]`

Um mal was vor Augen zu haben hier die Determinante einer 2×2-Matrix,

$$\det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = u^1 v^2 - u^2 v^1 , \tag{5.11}$$

die wir Sie bitten, auswendig zu lernen. Am besten nicht anhand der Namen der Einträge, sondern 'strukturell", etwa: "Produkt der Diagonalelement Minus Produkt

[2]Benannt nach Gottfried Wilhelm Leibniz, der Erfinder der Determinante

der Nebendiagonalelemente". Geometrisch bedeutet (5.11) übrigens den Flächeninhalt des durch die beiden Spaltenvektoren $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ und $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms. Wer's nicht glaubt – beweisen (oder eine der nächsten Vorlesungen besuchen, Stichwort "Kreuzprodukt").

Muss man die Determinante einer größeren Matrix mit Papier und Bleistift ausrechnen (und jeder ernsthafte Scholar der exakten Naturwissenschaften wird damit früher oder später konfrontiert) empfiehlt sich der **Laplacesche Entwicklungssatz**

$$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A^i{}_j \det \underline{A}_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)} \tag{5.12}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A^i{}_j \det \underline{A}_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \tag{5.13}$$

worin $\underline{A}_{ij}$ diejenige $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix von $\underline{A}$, die aus $\underline{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte übrigbleibt. Die Determinante einer solchen Matrix $\underline{A}_{ij}$ nennt man auch **Minore** $M_{ij} := \det(\underline{A}_{ij})$, und das Produkt $(-1)^{i+j}\det(\underline{A}_{ij})$ nennt man auch den **Kofaktor**. In der Praxis entwickelt man "nach der ersten Zeile", oder "nach der ersten Spalte".

Eine Matrix ist durch das n-Tupel ihrer Spalten eindeutig bestimmt, und wird daher zuweilen notiert $\underline{A} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$, worin $\underline{v}_i$ die i-te Spalte von $\underline{A}$. In dieser Notation lassen sich Eigenschaften der Determinante bequem formulieren: Die Determinante ist in jedem Eintrag **homogen** und **additiv**,

$$\det(\underline{v}_1, \ldots, \lambda\underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n) = \lambda \det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n) \tag{5.14}$$

$$\det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j + \underline{v}, \ldots, \underline{v}_n) = \det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n) + \det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}, \ldots, \underline{v}_n), \tag{5.15}$$

sie ist **alternierend**,

$$\det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n) = -\det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_n), \tag{5.16}$$

und **normiert**

$$\det(\underline{1}) = 1\,. \tag{5.17}$$

In der Mathevorlesung wird gezeigt, dass die Forderungen (5.14)-(5.17) genau eine Abbildung $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ bestimmen, und das ist die uns bereits vertraute Determinante ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$).

Sind also die Spaltenvektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ einer Matrix $\underline{A}$ linear abhängig – äquivalent: ist der Rang von $\underline{A}$ kleiner n – so ist notwendig $\det(\underline{A}) = 0$.

Geometrisch definieren n Vektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ die n spannenden Kantenvektoren eines Parallelepiped in einem n-dimensionalen affinen Raum, auch genannt n-Spat

$$\mathrm{Spat}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = \left\{ \sum \lambda^j \underline{v}_j \,\middle|\, 0 \leq \lambda^j\,, j = 1, \ldots, n \right\} \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{5.18}$$

Von dem Volumenmaß eines solchen Spats wird nun gefordert, dass es und die Eigenschaften (5.14)-(5.17) entsprechen der Tatsache, dass das Volumen Vol eines solchen Spats invariant unter Scherungen, und sich unter Streckung (oder Stauchung) einer der Kantenvektoren entsprechend vergrößert (oder verkleinert). Die Determinante eigent sich also hervorragend, das Volumen des Spats zu bestimmen.

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)) := |\det \underline{A}|\,. \tag{5.19}$$

Im Gegensatz zum Spatprodukt, das so nur ein einem dreidimensionalen Vektorraum definiert werden kann, ist mittels Determinante auch das Spatvolumen in affinen Räumen beliebiger Dimension erklärt.

Beim Umgang mit Determinanten gelten die Rechenregeln

$$\det(\underline{A}\,\underline{B}) = \det(\underline{A})\,\det(\underline{B}) \tag{5.20}$$

$$\det(\underline{A}^T) = \det(\underline{A}) \tag{5.21}$$

Angesichts (5.20) dürfen wir für die Ähnlichkeitstransformation (4.13) festhalten $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}')$, und also für beliebigen Vektrorraum-Endomorphismus $A : V \to V$ seine Determinante erklären

$$\det(A) := \det(\underline{A}) \tag{5.22}$$

worin $\underline{A}$ irgendeine Matrixdarstellung von A.

Sei nämlich $G \subset V$ irgendeine Menge von Vektoren deren Volumen von irgendwoher bekannt sei, dann ist das Volumen des Bildes $G' = A(G)$ unter dem Vektorraumendomorphismus $A : V \to V$ in Verallgemeinerung von ()

$$\mathrm{Vol}(A(G)) = |\mathrm{det} A| \mathrm{Vol}(G)\,. \tag{5.23}$$

Anwendung: Volumen der dreidimensionalen Vollkugel vom Radius R ist $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ellipsoid mit Halbachsen a, b, c ist Bild der linearen Transformation $(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz$ mit Determinante abc. Also ist Volumen des Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi abc R^3$.

5.4 Lineare Gleichungssysteme und Matrixinversion

Sucht man die Nullstelle der Funktion $f(x) = ax - b$, gilt es die Gleichung $ax = b$ zu lösen. Solange man die Lösung noch nicht kennt, heißt x die *Unbekannte*. Kennt man die Lösung, sagt man $\frac{b}{a}$ sei die Lösung der Gleichung $ax = b$ – wobei natürlich stillschweigend vorausgesetzt wird, dass $a \neq 0$. Im Fall $a = 0$ und $b \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ schlicht keine Lösung, genauer: die Lösungsmenge ist in diesem Fall die leere Menge.

Eine Gleichung der Form $ax = b$ nennt man eine *lineare Gleichung* in einer Unbekannten.[3] Entsprechend nennt man ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccc} {a^1}_1 x^1 & + \cdots + & {a^1}_n x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {a^m}_1 x^1 & + \cdots + & {a^m}_n x^n & = & b^m \end{array} \tag{5.24}$$

ein **lineares Gleichungssystem** für die n Unbekannten $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Sind alle b^i gleich Null, heißt das System **homogen**, andernfalls hießt es **inhomogen**.

Aufgefasst als linearen Abbildung $\underline{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ liest sich (5.24) in der Form $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$. Für gegebene Daten $(\underline{A}, \underline{b})$ bilden diejenigen $\underline{x}$, die $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ erfüllen, die **Lösungsmenge**

$$\text{Lös}(\underline{A}, \underline{b}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | \underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}\}\,. \tag{5.25}$$

Das Gleichungssystem (5.24) heißt **lösbar** falls Lös nicht leer; andernfalls heißt (5.24) unlösbar.

Klaro – das System $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\underline{b} \in \text{Bild}(\underline{A})$. Sei nun $\underline{x}_0$ eine Lösung von $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$, also $\underline{A}\ \underline{x}_0 = \underline{b}$, und $\underline{h}$ eine Lösung des homogenen Systems, also $\underline{A}\ \underline{h} = \underline{0}$, dann ist auch $\underline{x}_0 + \underline{h}$ eine Lösung. Kurz,

$$\text{Lös}(\underline{A}, \underline{b}) = \{\underline{x}_0 + \underline{h} | \underline{A}\ \underline{x}_0 = \underline{b}\,, \underline{h} \in \text{Kern}(\underline{A})\} \tag{5.26}$$

Offensichtlich ist ein lösbares Gleichungssystem in n Unbekannten genau dann eindeutig lösbar, wenn $\text{Kern}(\underline{A}) = \emptyset$, wenn also $\text{Rang}(\underline{A}) = n$. Hat man gar n Gleichungen in n Unbekannten, ist die Matrix $\underline{A}$ also quadratisch, so ist das Gleichungssystem $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(\underline{A}) \neq 0$.

[3] Die Funktion(!) $f(x) = ax - b$ ist aber keine lineare Funktion, sondern eine inhomogen lineare Funktion. Tja – Gleichung und Funktion sind halt verschiedene Kategorien, daher darf man die eine auch linear nennen und dieses Prdikat der anderen verweigern.

An die Lösung gelangt man durch elementare Umformungen. Dazu ein Beispiel (nach Jänich)

$$\begin{aligned} -x^1 + 2x^2 + x^1 &= -2 \qquad (5.27)\\ 3x^1 - 8x^2 - 2x^3 &= 4 \qquad (5.28)\\ x^1 + 4x^3 &= -2 \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Im ersten Schritt $(2) \to 3(1) + (2)$ und $(3) \to (1) + (3)$. Im zweiten Schritt $(3) \to (2) + (3)$ und fertig ist die Laube:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} . \qquad (5.30)$$

Natürlich kann ein Gleichungssystem von n Gleichungen in n Unbekannten am einfachsten gelöst werden wenn man nur wüsste wie eine quadratische $n \times n$-Matrix zu invertieren ist. Dazu zunächst ein kleiner

Satz: Erfüllen drei Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ die Gleichung $\underline{C} = \underline{B}\,\underline{A}$, und transformiert $\underline{B}$ und $\underline{C}$ durch simultan durchgeführte Zeilenumformungen in Matrizen $\underline{B}'$ und $\underline{C}'$, dann gilt $\underline{C}' = \underline{B}'\,\underline{A}$.

Den Beweis überlassen wir den Übungen. Hier begnügen wir uns damit, die Früchte dieses Satzes für die **Matrixinversion** zu ernten: $\underline{1} = \underline{A}\,\underline{A}^{-1}$, transformiere $\underline{A}$ und $\underline{1}$ simultan mittels Zeilenumormungen, so dass $\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{1}$, dann ist $\underline{1} \to \underline{A}^{-1}$.

Dazu wieder ein Beispiel (aus Jänich):

$$\begin{array}{lll}
\text{Start:} & \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \\
\begin{array}{l} \text{1. Schritt:} \\ (2) \to (2) - (1)\,, \\ (4) \to (4) - (1). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{2. Schritt:} \\ (3) \to (3) + (2). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{3. Schritt:} \\ (1) \to (1) - (3)\,, \\ (4) \to (4) + (3). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{4. Schritt:} \\ (2) \to (2) + \frac{1}{2}(4)\,, \\ (3) \to (3) - \frac{1}{2}(4)\,, \\ (4) \to \frac{1}{2}(4). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}
\end{array} \tag{5.31}$$

Wer Berechnungen von Hand unbefriedigend findet: nach der **Cramer'schen Regel** wird $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit quadratischer $n \times n$-Matrix $\underline{A}$ gelöst

$$x^i = \frac{\det \underline{A}_i}{\det \mathrm{A}}\,, \qquad i = 1, \dots, n\,, \tag{5.32}$$

worin die Matrix $\underline{A}_i$ gebildet wird, indem die i-te Spalte von $\underline{A}$ durch $\underline{b}$ ersetzt wird.

Als Korellar erhält man hier eine Formel für das Inverse einer quadratischen Matrix,

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{A}}\operatorname{adj}(\underline{A})\,, \tag{5.33}$$

worin die **Adjunkte** – nicht zu verwechseln mit der Adjungierten – die Transponierte der Matrix der Cofaktoren, also $\operatorname{adj}(\underline{A})^i{}_j = (-1)^{i+j}\det\underline{A}^j{}_i$.

Die Formeln werden für größere Matrizen, für die man gerne auf Computer-Algorithmen zurückgreift, schnell unahndlich. Ein Standard in diesem Gewerbe ist der **Gauss'sche Algorithmus** für dessen Darlegung allerdings auf weiterführende Veranstaltungen verwiesen werden muss.

5.5 Aufgaben

▷ **Aufgabe 5-1**

Gegeben zwei Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

Berechnen Sie die beiden Matrixprodukte $\underline{A}\,\underline{B}$ und $\underline{B}\,\underline{A}$ und bestimmen Sie den Kommutator $[\underline{A}, \underline{B}] = \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A}$.

▷ **Aufgabe 5-2**

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Bestimmen Sie den Rang von $\underline{A}$. Ist $\underline{A}$ invertierbar?

▷ **Aufgabe 5-3**

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} mittels elementarer Matrixumformungen.

▷ **Aufgabe 5-4**

Man bestimme die Determinante und die Inverse der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

▷ **Aufgabe 5-5**

Gegeben ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten x, y, z

$$x + 3y + 3z = 3\,, \tag{5.38}$$
$$2x + 2y + 4z = 1\,, \tag{5.39}$$
$$3x + y + 2z = 2\,. \tag{5.40}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus die Lösungsmenge des Systems.

▷ **Aufgabe 5-6**

Gegeben eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

(a) Ist die Abbildung $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ normerhaltend? Orientierungserhaltend? Gar eine reine Drehung?

(b) Skizzieren Sie das Bild der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter R.

