Kapitel 6

Eigenwertproblem und Hauptachsentransformation

6.1 Motivation

Gekoppelte Oszillatoren? Trägheitstensor?

6.2 Charakteristisches Polynom

Definition "Eigenwert und Eigenvektor" Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus. Ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Vektor $\vec{v} \neq o$ mit $A(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Offensichtlich ist $\vec{v}$ genau dann Eigenvektor (kurz: EV) von A zum Eigenwert λ

(kurz: EW), wenn $\vec{v} \in \mathrm{Kern}(A - \lambda \mathrm{id})$ – die Gleichung $A(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ kann nämlich mit der Abbildung "Identität" $\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$ auf die Form gebracht werden $(A - \lambda \mathrm{id})(\vec{v}) = o$. Der Kern von $A - \lambda\mathrm{id}$ ist ein Untervektorraum von V,

$$E_\lambda := \mathrm{Kern}(A - \lambda \mathrm{id}) \subset V \tag{6.1}$$

genannt **Eigenraum** von A zum EW λ. Die Dimension von E_λ heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ. Ist die geometrische Vielfachheit 1, nennt man λ **einfach**. Andernfalls sagt man, λ sei g_λ-fach **entartet**, $g_\lambda := \dim(E_\lambda)$.

Als Beispiel sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, in der kanonischen Basis gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

dann wäre 3 Eigenwert der geometrischen Vielfachheit 2, bzw. $g_3 = 2$, und -2 Eigenwert der geometrischen Vielfachheit 1. Eine Matrix der Form nennt man eine **Diagonalmatrix** (nur die Diagonale ist besetzt). Diagonalmatrizen sind besonders nett: man kann an ihnen die Eigenwerte sofort ablesen.

Der Kern von $A - \lambda\mathrm{id}$ ist genau dann nicht trivial, wenn nicht nur der Nullvektor im Kern, angesichts des Rangsatzes also wenn $\mathrm{rg}(A - \lambda\mathrm{id}) < n$, bzw. $\det(A - \lambda\mathrm{id}) = 0$. Schon bewiesen ist damit der

Satz: Die Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert des Endomorphismus A eines endlichdimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$, wenn

$$\det(A - \lambda\mathrm{id}) = 0\,. \tag{6.3}$$

Die Gl. (6.3) nennt man auch die **Säkulargleichung** oder *charakteristische Gleichung* von A.

Betrachtet man λ als Variable in $\mathbb{K}$, definiert

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathrm{id}) \tag{6.4}$$

das sog. **charakteristische Polynom** P_A von A. Ist A Endomorphimus eines $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, so ist $P_A(\lambda)$ ein Polynom vom Grad n,

$$P_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0\,, \tag{6.5}$$

mit $\mathbb{K}$-wertigen Koeffizienten c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Der o.a. Satz kann dann auch so formuliert werden: Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A. Zitieren wir an dieser Stelle den

Satz (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes komplexe Polynom $P(z) = c_nz^n + \ldots + c_1z + c_0$ mit $n \geq 1$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$ hat mindestens eine Nullstelle.

kommen wir zu dem Schluss: Jeder Endomorphismus eines $n \geq 1$-dimensionalen komplexen Vektorraums hat mindestens einen Eigenwert (und damit mindestens einen Eigenvektor).

Allgemeine Endomorphismen komplexer Vektorräume sind ganz nett. In der Praxis begegenen einem aber häufig reelle Vektorräume. Im reellen Vektorraum zählen nur die reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms als Eigenwerte.

Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten haben nur den Nullvektor gemeinsam – schließlich ist es unmöglich dass $A(\vec{v}) = \lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$ wenn $\lambda \neq \mu$ und $\vec{v} \neq o$. Daher sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig. Verallgemeinert: Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, und gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so ist das System $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ linear unabhängig.

Natürlich kann es vorkommen, dass ein Eigenwert – sagen wir λ_i – g_i-fach entartet ist. In diesem Falle wähle man in E_{λ_i} eine Basis von von Vektoren, sagen wir $(\vec{v}_i^{(1)}, \ldots, \vec{v}_i^{g_i})$. Das System $(\vec{v}_1^{(1)}, \ldots, \vec{v}_1^{(g_1)}, \vec{v}_2^{(1)}, \ldots, \vec{v}_2^{(g_2)}, \ldots, \vec{v}_k^{(1)} \ldots, \vec{v}_k^{(g_k)})$ ist dann linear unabhängig.

Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist sicherlich kleiner gleich $n = \dim(V)$. Sofern gar $\sum_{i=1}^k g_i = n$ wird V von einer Basis von Eigenvektoren aufgespannt. Endomorphismen, für die eine Basis aus Eigenvektoren existiert, heißen **diagonalisierbar**.

Diagonalisierbar (da schon diagonal!) ist die Spiegelung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{6.6}$$

Hingegen besitzt die Drehung

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

überhaupt keine (reellen) Eigenwerte, und schon gar keine Eigenvektoren, ist also (im reellen) nicht diagonalisierbar. Und bei der Scherung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

gibt es nur einen Eigenvektor, aber keine zwei, und also auch keine Basis von Eigenvektoren und somit ist auch die Scherung nicht diagonalisierbar.

6.3 Hauptachsentransformation

Nicht-diagonalisierbare Matrizen begegnen Ihnen eigentlich nur in der Mathevorlesung. In der Physik begegnen Ihnen die Selbstadjungierten – Hermiteschen bzw Symmetrischen – Endomorphismen. Und die sind samt und sonders diagonalisierbar!

Konzentrieren wir uns mal auf Euklidische Vektorräume $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, mit $V \simeq \mathbb{R}^n$. Sie erinnern sich – ein Endomorphismus A in einem Euklidischen Vektorraum ist *selbstadjungiert*, wenn $\langle A(\vec{u}), \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, A(\vec{v})\rangle$. Das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ hat nur reelle Koeffizienten, und solche Polynome brauchen im Reellen keine Nullstelle aufzuweisen. Lässt man allerdings komplexe λ zu, dann gibt es gemäß Fundamentalsatz der linearen Algebra eine komplexe Zahl $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $P_A(\lambda) = 0$. Entsprechend hat der in den komplexen Vektorraum $V^c \simeq \mathbb{C}^n$ fortgesetzte Endomorphismus $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sicherlich einen Eigenvektor $\vec{a} + i\vec{b}$. Sortiert nach Real- und Imaginärteil $A\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $A\vec{b} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{a}$. Nun ist aber, da A in V selbstadjungiert, $\langle A\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, A\vec{b}\rangle$, damit $\langle \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{a}\rangle$, oder $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b} - \beta\vec{b}\cdot\vec{b} = \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta\vec{a}\cdot\vec{a}$, bzw. $\beta(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2) = 0$, und also $\beta = 0$. Ergo: das charakterstische Polynom eines selbstadjungierten Endomorphismus A hat nur reelle Nullstellen – und das sind genau die Eigenwerte von A!

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander. Selbstadjungiertheit bedeutet nämlich $\langle A(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, A(\vec{w})\rangle$, und also $\langle \lambda\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \mu\vec{w}\rangle$, also $(\lambda - \mu)\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$, wegen $\lambda \neq \mu$ zwingend $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$.

Ist $\vec{v}$ Eigenvektor, so ist $V^\perp := \{\vec{w} \in V | \vec{w}\cdot\vec{v} = 0\}$ invarianter Untervektorraum von A, d.h. $A(\vec{v}^\perp) \in V^\perp$. Für $\vec{w} \in V^\perp$, also $\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle$ ist nämlich $\langle A(\vec{w}), \vec{v}\rangle = \langle \vec{w}, A(\vec{v})\rangle = \langle \vec{w}, \lambda\vec{v}\rangle = 0$.

Satz: Selbstadjungierte Endomorphismen eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums sind stets diagnonalisierbar, d.h. für $A : V \to V$ selbstadjungiert gibt es eine ONB $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$A\vec{a}_i = \lambda_i \vec{a}_i \,, . \tag{6.9}$$

Merke: die Eigenwerte a_i müssen hier nicht alle verschieden voneinander sein.

In der Praxis liegt A in Form einer Matrix $\underline{A}$ vor, d.h.

Korrellar "Hauptachsentransformation" Ist $\underline{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrisch, also $\underline{A} = \underline{A}^T$, so gibt es eine orthogonale Matrix $\underline{R} \in O(n)$ so dass

$$\underline{R}^{-1}\, \underline{A}\, \underline{R} = \underline{D} \tag{6.10}$$

worin $\underline{D}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen, und $\underline{R}$ eine Matrix, deren j-te Spalte gleich dem j-ten Eigenvektor $\underline{a}_j$.

Da $\underline{R}$ orthogonal gilt selbstverständlich $\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$.

Der Hauptachsentransformation begegnet man beispielsweise in der klassischen Mechanik, Stichwort Trägheitstensor, oder in der Elektrodynamik anisotroper Medien, Stichwort Dielektrizitätstensor. Auch in der Quantenmechanik spielt die Hauptachsentransformation eine wichtige Rolle, nur dass dort der zugrundeliegende Vektorraum komplex, und die Hauptachsentrafo nicht durch eine orthogonale sondern durch eine unitäre Trafo bewirkt wird.

Das Rezept für die Diagonalisierung einer gegebenen symmetrischen Matrix $\underline{A} = \underline{A}^T$ lautet nun wie folgt:

1. Bilde das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$, d.h. berechne die Determinante $\det(\underline{A} - \lambda\underline{1})$, und bestimme dessen verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

2. Für jedes λ_i bestimme man eine Basis $(\underline{u}_i^{(1)}, \ldots, \underline{u}_i^{(g_i)})$ des Eigenraums E_{λ_i} durch Lösung des Gleichungssystems $\underline{A}\ \underline{x} = \lambda_i \underline{x}$, etwa mittels des Gauss'schen Algorithmus.

3. Transformiere die Basis $(\underline{u}_i^{(1)}, \ldots, \underline{u}_i^{(g_i)})$ in eine Orthonormalbasis $(\underline{v}_i^{(1)}, \ldots, \underline{v}_i^{(g_i)})$, etwa mittels des Erhard Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens.

4. Reihe die Basen aneinander, $(\underline{v}_1^{(1)}, \ldots, \underline{v}_k^{(g_k)}) := (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$. Der j (Spalten-)Vektor $\underline{a}_j$ ist dann die j-te Spalte der Transformationsmatrix $\underline{R}$.

6.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 6-1**

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

▷ **Aufgabe 6-2**

Für die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

bestimme man die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren.

Bemerkung: Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (Pendel etc.) nimmt in kanonischen Variable q, p (q:Auslenkung, p:Impuls) die Form an $\dot{q} = \frac{1}{m}p$,

$\dot{p} = -m\omega_0^2 q$. In "Matrizenschreibweise" also $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$. Der Exponentialansatz $q = \tilde{q}e^{\lambda t}$, $p = \tilde{p}e^{\lambda t}$ führt dann ganz natürlich auf das Eigenwertproblem zu A.

▷ Aufgabe 6-3

Eine wichtige Zahl, die man jeder $n \times n$ quadratischen Matrix A zuordnen kann, ist ihre *Spur* (engl. Trace),

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A^i{}_i \tag{6.13}$$

also "Summe der Diagonalelemente". Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA) && (6.14) \\ \mathrm{Tr}(S^{-1}AS) &= \mathrm{Tr}(A) && (6.15) \end{aligned}$$

und schließen: die Spur einer diagnoalisierbaren Matrix ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte.

▷ Aufgabe 6-4

Gegeben eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

mit a, b, c, d komplex. Unter welchen Bedingungen ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls Eigenwerte und Eigenvektoren als Funktion von a, b, c, d.