Kapitel 7

Form und Tensor

`[In dieser Form nie gebracht; Teile über diverse Vorlesungen verteilt]`

Der Begriff "Tensor" begegnet Ihnen in der Physik allerorten – etwa in Form des Trägheitstensors, des dielektrischen Tensors, oder des .... Was daber ist das nun genau – ein Tensor? Ein Tensor ist, um die Sache kurz zu machen, eine Multilinearform auf den Darstellungsräumen einer Transformationsgruppe, wie beispielsweise der Euklidischen Gruppe, der Galileigruppe, oder der Poincaregruppe.[1]

7.1 Linearform und Dualraum

Multilinearformen bauen wir uns uns diesem Kurs aus Linearformen, und das erfordert erst einmal eine anständige

[1] ... und nicht etwa "eine Matrix".

Definition: Eine **Linearform** $\boldsymbol{\ell}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine lineare Abbildung, die jedem Element von V eine Zahl $\in \mathbb{K}$ zuweist,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell} : V &\to \mathbb{K} \\ \vec{v} &\mapsto \boldsymbol{\ell}(\vec{v}) \end{aligned} \tag{7.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} &\underset{\vec{u},\vec{v}\in V}{\forall} && \boldsymbol{\ell}(\vec{u}+\vec{v}) = \boldsymbol{\ell}(\vec{u}) + \boldsymbol{\ell}(\vec{v}) && \textbf{additiv} \\ &\underset{\lambda\in\mathbb{K}}{\forall}\underset{\vec{v}\in V}{\forall} && \boldsymbol{\ell}(\lambda\vec{v}) = \lambda\boldsymbol{\ell}(\vec{v}) && \textbf{homogen} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Es ist übrigens ganz hilfreich, sich so eine Linearform $\boldsymbol{\ell}(\cdot)$ als Maschine vorzustellen, die beim Einwurf eines Vektors $\vec{v}$ in den Schlitz $(\cdot)$ mit einer Zahl $\boldsymbol{\ell}(\vec{v})$ antwortet.

Weil wir schon wissen, wie sich Zahlen multiplizieren und addieren lassen, weiß man eigentlich auch schon, wie man Linearformen $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \ldots$ addieren und mit Zahlen multiplizieren kann,

$$(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{\omega})(\vec{v}) \;:=\; \boldsymbol{\ell}(v) + \boldsymbol{\omega}(v)\,, \tag{7.3}$$

$$(\lambda\boldsymbol{\ell})(\vec{v}) \;:=\; \lambda\boldsymbol{\ell}(\vec{v})\,. \tag{7.4}$$

Die Linearformen mit der o.a. Vorschrift Addition und Skalarmultiplikation bilden also ihrerseits einen Vektorraum, den sog **Dualraum** von V, bezeichnet V^*. Damit man die Elemente aus V und V^* auseinanderhalten kann, heißen die Elemente (Vektoren) aus V auch "Vektoren" (gut so – Vektoren heißen also Vektoren), die Elemente (Linearformen) aus V^* nennt man zuweilen **Kovektoren**. Vektoren notieren wir – wie gehabt – mit einem Pfeil auf dem Kopf, Linearformen fett.

Ein Vektorraum V und sein Dualraum V^* sind isomorph. Sie sind nämlich Vektorräume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$, und sie sind von gleicher Dimension,

$$\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}V^*\,. \tag{7.5}$$

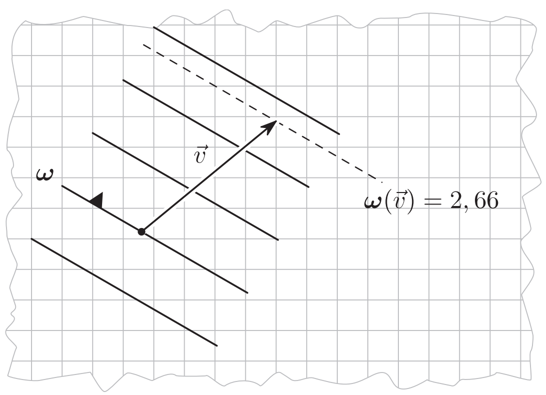

Abb 7.1 *Die Antwort einer Linearform $\boldsymbol{\omega}$ auf einen Vektor $\vec{v}$. Der Vektor "durchsticht"* 2,66 *Blätter der Linearform, daher* $\boldsymbol{\omega}(\vec{v}) = 2,66$.

was man schnell verifiziert, wenn man sich nur daran erinnert, dass eine lineare Abbildung durch die Bilder einer irgendwie gewählten Basis bereits vollständig spezifiziert ist. Das sind n Zahlen. Der lineare Raum der von Dingen bevölkert wird welche jeweils durch n Zahlen spezifiziert werden können ist aber definitionsgemäß n-dimesional, qed.

Vektoren kann man sich als Pfeile mit Schaft und Spitze veranschaulichen. Wie soll man sich LInearformen vorstellen? "Na ja", werden Sie sagen, "da's wohl sowas wie Vektoren sind eben auch als Pfeile!" Können Sie gerne so machen, nur – um $\boldsymbol{\ell} \in V^*$ als lineare Abbildung zu visualisieren – nützt das nicht viel. Sie haben an dieser Stelle nämlich noch keinen Zwei-Pfeil Begriff, wie beispielsweise den "Winkel" zwischen zwei Pfeilen. Dazu brauchen Sie ein Skalarprodukt – und das ist hier ausdrücklich nicht vorausgesetzt. Ohne Skalarprodukt können Sie aber zumindest zählen! Insbesondere können Sie zählen, wieviele Ebenen ein Pfeil durchstößt, der in eine Schar paralleler Ebenen gesteckt wird. Und das ist auch schon die Antwort: eine Linearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum V kann man sich als eine Schar von $(n-1)$-dimensionalen Hyperebenen in einem n-dimensionalen affinen Raum vorstellen, für den V als Vektorraum der Verschiebungen fungiert. Im 3-dimensionalen ist eine Linearform also kein Pfeil, sondern – Blätterteig!

Klar, dass man auch auf V^* eine Basis einführen kann. Sei zunächst $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ eine Basis von V. Die sog **Dualbasis** von V^* sind dann genau diejenigen Linearformen $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$, für die

$$\mathbf{b}^i(\vec{b}_j) = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{7.6}$$

Haben Sie einen Vektor $\vec{v} = \vec{b}_i v^i$ und eine Linearform in der dualen Basisdarstellung gegeben, $\boldsymbol{\ell} = \ell_i \mathbf{b}^i$, liest sich das Bild in Einstein'scher Summenkonvention $\boldsymbol{\ell}(\vec{v}) = \ell_i v^i$.

Hat man zwei Vektorräume V und W induziert jede lineare Abbildung $A : V \to W$

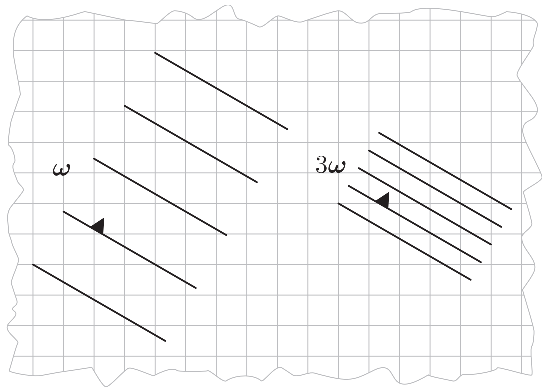

Abb 7.2 *Unter Multiplikation mit $\lambda > 1$ verdichtet sich der Blätterteig. Hier: $\lambda = 3$.*

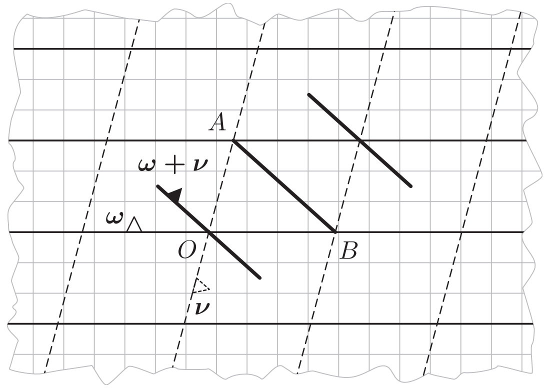

Abb 7.3 *Wie man zwei Linearformen addiert. Die Parallelenscharen $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\nu}$ schneiden sich in Punkten A und B. Die Verbindungstrecke AB definiert die Summe $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\nu}$.*

via

$$(A^T\boldsymbol{\omega})(\vec{v}) = \boldsymbol{\omega}(A\vec{v}) \tag{7.7}$$

eine lineare Abbildung $A^T : W^* \to V^*$, genannt die auf V zurückgezogene Abbildung A (engl. **pull-back**). Ist A durch ihre Wirkung auf eine V-Basis $\vec{b}_i$ erklärt $A\vec{b}_i = \vec{b}_\mu A^\mu{}_i$ (wobei die $\vec{b}_\mu$ Basisvektoren des W), so ist $A^T\mathbf{b}^\mu = \mathbf{b}^i A_i{}^\mu$ mit $A_i{}^\mu = A^\mu{}_i$. In Matrixdarstellung: die Matrix $(A_i{}^\mu)$ ist die Transponierte der Matrix $(A^\mu{}_i)$.

Bezeichnet man $\mathbb{K}^{n*}$ den Dualraum zum Vektorraum(!) $\mathbb{K}^n$, können Linearformen auf einem n-dimensionalen Vektorraum V als Zahlenzeilen notiert werden,

$$\begin{aligned} \varphi^* : V^* &\to \mathbb{K}^{n*} \\ \boldsymbol{\ell} &\mapsto (\ell_1, \ldots, \ell_n)_{\mathcal{B}^*}\,, \end{aligned} \tag{7.8}$$

womit sich die Wirkung einer Linearform $\boldsymbol{\ell}$ auf einen Vektor $\vec{v}$ in der Notation der Matrizenrechnung formuliert (Summenkonvention beachten!)

$$\boldsymbol{\ell}(\vec{v}) = (\ell_1, \ldots, \ell_n)_{\mathcal{B}^*} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \ell_i v^i\,. \tag{7.9}$$

Auch wenn Sie versucht sind hier ein Skalarprodukt zu sehen – tun Sie es nicht. Ein Skalarprodukt ist hier nicht vorausgesetzt, und bei (7.9) handelt es sich schlicht um das Bild eines Vektors unter einer Linearform.

Der Dualraum eines Dualraums V^*, also der Raum der Linearformen von Kovektoren, genannt **Bidualraum**, bezeichnet V^{**}, identifizieren wir via

$$\vec{v}(\boldsymbol{\ell}) := \boldsymbol{\ell}(\vec{v}) \tag{7.10}$$

sogleich mit V, also $V^{**} = V$. In Konsequenz sehen wir Vektoren nun januskköpfig – einerseits als Argumente von Linearformen , andererseits als Linearformen von Linearformen. Im Matrizenkalkül (7.9) ist das allerdings schlecht abzubilden.

7.2 Wo einem Kovektoren begegnen ... und wie man aus ihnen Vektoren macht

Wenn Sie nun glauben Linearformen seien exotischer Dinger mit denen sich allenfalls MathematikerInnen die Zeit vertreiben irren Sie sich. Fast alle bepfeilten Größen die Sie aus der Schulphysik oder der Experimentalphysik kennen sind "eigentlich" Linearformen. Prominente Beispiele sind der Impuls und die Kraft.[2]

"Wie das", werden sie vielleicht sagen, "ich dachte die Kraft ist ein Vektor?" Das stimmt schon – wie wir weiter untern sehen werden kann in einem Euklidischen Vektorraum (das ist ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt), der Linearform Kraft in der Tat ein Vektor zugeordnet werden. Aber eigentlich bedürfen wir des Skalarprodukts garnicht, um dem Begriff Kraft physikalischen Sinn zu verleihen. 'Affinität' – also die Verschiebbarkeit – im Eukldischen Raum $\mathbb{E}$ reicht nämlich völlig aus. In einem homogenen Kraftfeld hängt die Arbeit $A_{P\to Q}$, die man aufbringen muss, um das Teilchen von P nach Q zu verschieben, nur vom Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PQ} \in V$ ab. Definieren wir 'Kraft' als Linearform $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{F}(\overrightarrow{PQ}) = -A_{P\to Q}$, ist insbesondere $A_{P\to Q} = A_{P\to R} + A_{R\to Q}$ wie es sein soll: in einem konservativen – insbesondere homogenen – Kraftfeld ist die Arbeit (Energiedifferenz) unabhängig vom Weg. Die Notation $A_{P\to Q} = -\langle \vec{F}, \overrightarrow{PQ}\rangle$ ist mit dem Skalarprodukt hier zwar nicht falsch, aber irreführend: es bedarf hier keiner Metrik. Das Messen von Energiedifferenzen – und nichts anderes ist ja die Bestimmung eines homogenen Kraftfeldes – erfordert eben nicht Abstände, Längen oder Winkel messen zu können.

Und wie ist es mit inhomogenen Kraftfelder? Genauso. Ein inhomogenes Kraftfeld ist nichts anderes als eine Abbildung, die jedem Punkt $P \in \mathbb{E}$ eine gewisse Linearform

[2] Auch das Differential ist eine Linearform. Aber das Differential kennen Sie offiziell noch nicht ...

$\mathbf{F}_P$ zuweist. Eine solche Abbildung heißt **Differentialform** ersten Grades oder kurz **1-Form**. Kraftfelder sind also keine Vektorfelder sondern 1-Formen. Man lernt nie aus ....

Nun haben Sie aber nichts falsches gelernt, als Ihnen gesagt wurde, dass Kräfte Vektoren sind (und Kraftfelder Vektorfelder). Das liegt daran, dass auf jedem Vektorraum, auf dem eine nichtentartete (aber nicht notwendigerweise positiv definite) Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ist – insbesonder also im Euklidischen Vektorraum – jedem Vektor $\vec{v} \in V$ umkehrbar eindeutig eine Linearform $\langle\vec{v},\cdot\rangle \in V^*$ zugeordnet ist,

$$\begin{aligned} \flat : V &\to V^* \\ \vec{v} &\mapsto \flat(\vec{v}) := \langle\vec{v},\cdot\rangle \end{aligned} \tag{7.11}$$

Weil nämlich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht-ausgeartet ist $\flat$ eineindeutig bzw injektiv, wegen $\dim V = \dim V^*$ aber auch surjektiv, also $\flat$ in der Tat bijektiv. Insbesondere existiert die inverse Abbildung, notiert $\sharp := \flat^{-1}$,[3], mit deren Hilfe $\vec{F} := \sharp(\mathbf{F})$ schreibt sich im Euklidischen Vektorraum die Linearform Kraft $\mathbf{F} := \langle\vec{F},\cdot\rangle$, und also $\mathbf{F}(\vec{v}) = \langle\vec{F},\vec{v}\rangle$, gerne auch notiert $\mathbf{F}(\vec{v}) = \vec{F}\cdot\vec{v}$.

Der Witz bei dem Isomorphismus (7.11) ist übrigens, dass er nur über eine Struktur – hier: das Skalarprodukt – definiert ist, und nicht über eine irgendwie ausgewählte Basis. Solche Isomorphismen werden gerne mit dem Adjektiv *kanonisch* ausgezeichnet. Die Isomorphismen der Spalten- bzw Zeilenvektorabbildung, im Gegensatz, sind nicht kanonisch: sie bedürfen der Angabe einer Basis.

Die gerade eingeführte Abbildung $\sharp : V^* \to V$ wird herangezogen, um auch ein

[3] Diese Notation ist dem im übrigen ausgezeichneten kleinen Lehrbuch *Vektoranalysis* von Klaus Jänich entnommen. Er schreibt "Den Sinn der Notation erkennt man aus den englischen Bezeichnungen für $\sharp$ und $\flat$ in der Musik, die bekanntlich 'sharp' und 'flat' heißen. Durch $\sharp$ wird die Linearform $\boldsymbol{\alpha}$ zum Vektor $\sharp(\boldsymbol{\alpha})$ 'angespitzt'." Und, füge ich hinzu, durch $\flat$ wird der spitze Vektor $\vec{v}$ zum Blätterteig $\langle\vec{v},\cdot\rangle$ verflacht.

Skalarprodukt auf V^* zu definieren,

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) := \langle \sharp(\boldsymbol{\alpha}), \sharp(\boldsymbol{\beta})\rangle \,. \tag{7.12}$$

Symmetrie und Nichtentartung übertragen sich hier von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $(\cdot,\cdot)$.

Sei $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n$ eine Basis von V und $\mathbf{b}^1,\ldots,\mathbf{b}^n$ die Dualbasis, $\mathbf{b}^i(\vec{b}_j) = \delta^i{}_j$. Dann gilt für die jeweiligen Skalarprodukte

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j\rangle = g_{ij} \Leftrightarrow (\mathbf{b}^i,\mathbf{b}^j) = g^{ij} \tag{7.13}$$

wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix,

$$g^{ij}g_{jk} = g_{ij}g^{jk} = \delta^i{}_k \tag{7.14}$$

Der Beweis ist schnell erbracht. Wegen $\flat(\vec{b}_i)(\vec{b}_j) \equiv \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j\rangle = g_{ij}$ offensichtlich $\flat(\vec{b}_i) = g_{ij}\mathbf{b}^j$. Daher $\mathbf{b}^i = g^{ij}\flat(\vec{b}_j)$, wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix, und ergo $\sharp(\mathbf{b}^i) = g^{ij}\vec{b}_j$. Damit $(\mathbf{b}^i,\mathbf{b}^j) \equiv \langle \sharp(\mathbf{b}^i), \sharp(\mathbf{b}^j)\rangle = g^{ik}g^{jl}\langle \vec{b}_k, \vec{b}_l\rangle = g^{ik}g_{kl}g^{jl} = \delta^i{}_l g^{jl} = g^{ij}$.

Das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren, $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = u^i g_{ij} v^j$, kann mit Hilfe des Isomorphismus (7.11) auch als inneres Produkt geschrieben werden, $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = i_{\vec{v}}\flat(\vec{u}) = i_{\vec{u}}\flat(\vec{v})$. Ausgedrückt in dualen Basisformen $\flat(\vec{u}) = u_i\mathbf{b}^i$ bzw $\flat(\vec{v}) = v_i\mathbf{b}^i$ mit kovarianten Komponenten (Index unten!) $u_i = g_{ij}u^j$ bzw $v_i = g_{ij}v^j$.

Im klassischen Tensorkalkül ist das Rauf- und Runterziehen von Indizes – die sog *Indexgymanstik* – ein beliebter Sport. In der Relativitätstheorie werden wir uns damit ausführlich beschäftigen. Im Euklidischen Vektorraum ist in einer Orthonormalbasis definitionsgemäß $g_{ij} = \delta_{jj}$, und da $\delta_{ij} = \delta^{ij}$ sind Vektorkomponenten und die Komponenten der via () zugeordneten Linearform gleich. Kurz: sofern man mit einer ONB arbeitet (was meist = eigentlich immer der Fall ist) muss im Euklidischen VR zwischen Vektor und Kovektor nicht unterschieden werden. Auf die Stellung der Indices oben/unten kommt es dann nicht an, weshalb in fast allen Lehrbüchern (wo immer der Euklidische VR $\mathbb{R}^n$ mit Standardbasis zugrunde liegt) die Indices unten notiert werden.

Metrische Dualbasis vs algebraische Dualbasis.

7.3 Pull-Back und Transponierte

Hat man zwei Vektorräume V und W induziert jede lineare Abbildung $A : V \to W$ via

$$(A^T \boldsymbol{\omega})(\vec{v}) = \boldsymbol{\omega}(A\vec{v}) \tag{7.15}$$

eine lineare Abbildung $A^T : W^* \to V^*$, genannt die auf V zurückgezogene Abbildung A (engl. **pull-back**). Ist A durch ihre Wirkung auf eine V-Basis $\vec{b}_i$ erklärt $A\vec{b}_i = \vec{b}_\mu A^\mu{}_i$ (wobei die $\vec{b}_\mu$ Basisvektoren des W), so ist $A^T \mathbf{b}^\mu = \mathbf{b}^i A_i{}^\mu$ mit $A_i{}^\mu = A^\mu{}_i$. In Matrixdarstellung: die Matrix $(A_i{}^\mu)$ ist die Transponierte der Matrix $(A^\mu{}_i)$.

7.4 Bilinearform . . .

Wir kennen jetzt zwei Typen von geometrischen Dingen, Vektoren und Kovektoren. Ist eine Basis ausgewählt werden beide mittels einfach indizierter Größen dargestellt. Schlägt man ein x-beliebiges Physikbuch auf, begegnen einem aber auch zweifach indizierte Größen, denken Sie nur an den Trägheitstensor eines Kreisels, den Qudrupoltensor einer Massendichte oder den Suszeptibilitätstensor eines Festkörpers. Aber auch drei-fach indizierte Größen sind Ihnen vielleicht schon geläufig, etwa in Form der ϵ_{ijk}. Sie ahnen schon, dass auch das nichts anderes als Komponenten sind, Komponenten von geometrischen Größen, also “Dingen an sich”, bezüglich irgendeiner

Basis. In der Sprache der Mathematik heissen diese Dinge Multilinearform, in der Physik heißen sie Tensor.

Eine **Bilinearform** auf einem $\mathbb{K}$ Vektorraum V ist eine Abbildung $\mathbf{B} : V \times V \to \mathbb{K}$ die für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ erfüllt

$$\mathbf{B}(\vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\mathbf{B}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta\mathbf{B}(\vec{u}, \vec{w}) \qquad \textbf{Rechtslinear}\,, \tag{7.16}$$
$$\mathbf{B}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) = \alpha\mathbf{B}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\mathbf{B}(\vec{v}, \vec{w}) \qquad \textbf{Linkslinear}\,. \tag{7.17}$$

Eine Bilinearformen heißt

$$\textbf{symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{B}(\vec{v}, \vec{u}) \tag{7.18}$$
$$\textbf{positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}(\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad \text{für alle } \vec{v} \in V,\, \vec{v} \neq \vec{o}\,, \tag{7.19}$$
$$\textbf{alternierend} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathbf{B}(\vec{v}, \vec{u}) \tag{7.20}$$

Gibt es keinen nichttrivialen Vektor $\vec{u}$ so dass für alle nichttrivialen Vektoren $\vec{v}$ die Bilinearform $\mathbf{B}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ oder $\mathbf{B}(\vec{v}, \vec{u}) = 0$ erfüllt, heißt $\mathbf{B}$ **nicht-ausgeartete**.[4]

Bilinearformen lassen sich addieren und mit Körperkoeffizienten multiplizieren – die Bilinearformen bilden ihrerseits einen Vektorraum, bezeichnet $V^* \otimes V^*$. Nun ist jede Bilinearform $\mathbf{B}$ durch die n^2 Zahlen $B_{ij} := \mathbf{B}(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$, die die Antwort von $\mathbf{B}$ auf zwei Elemente einer Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von V spezifizieren, eindeutig festgelegt.[5] Der Vektorraum $V^* \otimes V^*$ ist also n^2-dimensional. Prominente Unterräume sind der $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Unterraum der alternierenden Bilinearformen, bezeichnet

[4] In einer Matrixdarstellung bedeutet das, dass die Darstellungsmatrix $\underline{B}$ von vollem Rang.

[5] In der Physik werden die B_{ij} als Matrixelemente einer $n \times n$ Matrix $\underline{B} = (B_{ij})$ aufgefasst. Man sagt dann, die B_{ij} definieren eine **quadratische Form**. Symmetrische Bilinearformen werden durch symmetrische Matrizen dargestellt, $B_{ij} = B_{ji}$. Solche Matrizen haben bekanntlich reelle Eigenwerte. Ist keiner dieser Eigenwerte 0 so ist B_{ij} die Darstellungsmatrix einer nichtentarteten symmetrischen Bilinearform. Sind alle Eigenwerte größer Null, ist die Bilinearform positiv definit.

$\mathrm{Alt}^2 V$, und der komplementäre $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionale Unterraum der symmetrischen Bilinearformen.

Bilinearformen laufen in der Physik unter dem Begriff **Tensor**, pedantisch **kovarianter Tensor zweiten Grades**. Prominentes Beispiel ist der Trägheitstensor eines starren Körpers – mathematisch eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Bildlich vorstellen kann man sich so eine Bilinerform über einem drei-dimensionalen Vektorraum als Ellipsoid. Das Ellipsoid ist dabei die Menge aller Vektoren $\vec{v} \in V$ für die $\mathbf{B}(\vec{v}, \vec{v}) = 1$.[6]

Prominentes Beispiel einer alternierenden Bilinearform (genauer: eines Feldes alternierender Bilinearformen) ist das homogene Magnetfeld. Wie das – werden Sie vielleicht sagen – ich dachte das ist ein Vektorfeld? Und das ist schon richtig: es gibt eine noch einzuführende Abbildung, genannte der Hodge'sche Stern, der es einem gestattet, einer alternierenden Bilinearform in einem dreidimensionalen Vektorraum mit Euklidischem Skalarprodukt zunächst eine Linearform zuzuordenen, und dieser wiederum einen Vektor. Dass das wohl gut gehen kann sieht man schon daran dass mit V dreidimensional nicht nur V^* sondern eben auch $\mathrm{Alt}^2 V$ dreidimensional. Die genannten Vektorräume sind isomorph, ohne weitere Angaben lässt sich aber kein kanonischer, dh basisunabhängiger Isomorphismus angeben.

Doch auch ohne Metrik oder den Stern von Hodge lässt sich eine alternierende Bilinerform geometrisch deuten. Ist V dreidimensional gibt es zu jeder alternierenden Bilinearform genau einen ein-dimensionalen Unterraum U von V so dass für beliebiges $\vec{b} \in U$ gilt $\mathbf{B}(\vec{b}, \vec{v}) = 0$ für alle $\vec{v} \in V$. Sei nun $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ eine Basis von V wobei $\vec{b}_1$ ein Vektor aus U. Die Form $\mathbf{B}$ ist dann vollständig bestimmt, wenn für die beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ die Antwort $\mathbf{B}(\vec{b}_2, \vec{b}_3) := B$ festgelegt ist. Legt man durch die Eckpunkte des von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ aufgespannten Paralellogramms

[6]Prominenten Beispiel einer symmetrischen, aber nicht positiv definiten, sondern lediglich nicht ausgearteten Bilinearform ist die Raumzeitmetrik in der Relativitätstheorie.

jeweils Geraden in Richtung $\vec{b}_1$ hat man schon eine affine Vorstellung von so einer alternierenden Bilinearform: eine Schar paralleler Geraden. Die Antwort $\mathbf{B}(\vec{u}\vec{v})$ ist dann genau das B-fache der Zahl von Geraden, die das von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Paralellogramm durchsetzen.

Mit dieser Vorstellung im Kopf werden sie sich auch nicht mehr wundern, dass die elektrische Stromdichte $\mathbf{j}$ und auch die elektrische Flußdichte $\mathbf{D}$ beides alternierende Bilinearformen sind. Die Antwort $\mathbf{j}(\vec{a},\vec{b})$ ist dann nichts anderes als die pro Zeiteinheit durch das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm transportierte Ladungsmenge, genannt der elektrische Strom I. Analog heißt die Antwort $\mathbf{D}(\vec{a},\vec{b})$ elektrischer Fluß.[7] Die elektrische Flussdichte ist übrigens von der elektrischen Feldstärke wohl zu unterscheiden: $\mathbf{D}$ ist eine alternierende Bilinearform, $\mathbf{E}$ eine Linearform.[8] Nun lernen Sie in der Experimentalphysik dass (1) beides Vektoren sind, die (2) über die "Materialbeziehung" (engl. *consitutive relation*) $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ verknüpft sind. Wie schon gesagt – verkehrt ist das nicht. Aber der kleine Algebraiker braucht hier halt ein Skalarprodukt und den Stern von Hodge um die Identifizierung sauber darstellen zu können . . .

7.5 . . . und Multilinearform

Wenn wir schon Bilinearformen betrachten kann man das ganze auch gleich auf die sog **Multilinearformen** verallgemeinern. Und wenn man schon verallgemeinert, kann man auch gleich den **Bidualraum** V^{**} der linearen Abbildungen $V^* \to \mathbb{R}$ einführen. Für den vereinbaren wir $V^{**} := V$ mit $\vec{v}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}(\vec{v})$ und studieren jetzt multilineare

[7] Zu beachten ist hier, dass sowohl der elektrische Strom als auch der elektrische Fluss zu ihrer Definition keiner Metrik bedürfen. Nix mit "senkrecht" oder Ähnlichem . . .

[8] Die elektrische Feldstärke ist "Kraft pro Ladungsmenge", und "Kraft" ist eine Linearform – schon vergessen?

Abbildungen vom Typ

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p-\text{mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q-\text{mal}} & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_q) & \mapsto & \alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_q) \end{array} . \tag{7.21}$$

Werden Linearkombinationen solcher Abbildungen nach den üblichen Regeln erklärt, kann die Menge derartiger Abbildungen mit einem Vektorraum identifiziert werden, genannt der **Tensorraum** $\mathcal{T}^{(p,q)}V$ der p-fach kontravarianten und q-fach kovarianten Tensoren, schlicht Tensoren vom Typ (p, q). Im Anschluss an die bereits vorhandenen Räume wird dabei vereinbart $\mathcal{T}^{(0,0)} := \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^{(1,0)} \equiv V^{**} \equiv V$, und $\mathcal{T}^{(0,1)}) \equiv \mathcal{T}_1 = V^*$.

Das Tensorprodukt zweier Tensoren $\alpha \in \mathcal{T}^{(p,q)}$ und $\beta \in \mathcal{T}^{(p',q')}$ ist ein Tensor $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{T}^{(p+p',q+q')}$, der definiert ist

$$(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{x}_1, \ldots, dx_{p+p'}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{q+q'}) = \alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_q)\beta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{p'}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{q'}) . \tag{7.22}$$

Das so eingeführte Tensorprodukt ist bilinear, assoziativ $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, aber im allgemeinen nicht kommutativ, $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$.

Der lineare Raum aller Tensoren vom Typ (p, q) ist das Tensorprodukt der "Grundräume" V und V^*,

$$\mathcal{T}^{(p,q)} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p-\text{mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q-\text{mal}} \tag{7.23}$$

Dieser Raum ist n^{p+q}-dimensional. Die direkte Summe

$$\mathcal{T}^{(*,*)}V = \oplus \mathcal{T}^{(p,q)}V , \tag{7.24}$$

versehen mit der tensoriellen Multiplikation $\otimes$ bildet eine unendlich-dimensionale, assoziative, aber nicht kommutative Algebra, die (gemischte) **Tensoralgebra** über V.

Zurück zum $\mathcal{T}^{(p,q)}$. Als Basis können hier die $\vec{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}_{i_p} \otimes \mathbf{b}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{j_q}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n$ herangezogen werden. Bezüglich einer solchen Basis besitzt jeder Tensor $t \in \mathcal{T}^{(p,q)}$ eine eindeutige Darstellung

$$t = t^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \vec{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}_{i_p} \otimes \mathbf{b}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}^{j_q} \tag{7.25}$$

Unter einem Basiswechsel transformieren die Basen in $\mathcal{T}^{(p,q)}$ gemäß

$$\vec{a}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{a}_{i_p} \otimes \mathbf{a}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^{j_q} = \vec{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \vec{b}_{k_p} \otimes \mathbf{b}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}^{l_q} \tag{7.26}$$

und also die Komponenten gemß̈

Verjüngung

7.6 Aufgaben

▷ Aufgabe 7-1

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien Basisvektoren verabredet,

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

Bestimmen Sie die algebraische Dualbasis $\underline{b}^i$, $i = 1, 2, 3$.

▷ Aufgabe 7-2

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathrm{Alt}^2 V$ der alternierenden Bilinearformen über einem n-dimensionalen Vektorraum V von der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Was ergibt sich für den allseits beliebten dreidimensionalen Vektorraum der "physikalischen" Vektoren?

▷ Aufgabe 7-3

Zeigen Sie: Ist V dreidimensional gibt es zu jeder alternierenden Bilinearform genau einen ein-dimensionalen Unterraum U von V so dass für beliebiges $\vec{b} \in U$ gilt $\mathbf{B}(\vec{b}, \vec{v}) = 0$ für alle $\vec{v} \in V$.