# Kapitel 8

# Elemente der Infinitesimalrechnung

Gegenstand sind die infiniten Prozesse im Bereich der reellen Zahlen.[1] Grob gesagt wird “das Unendliche” (ob unendlich klein oder unendlich groß) mit in die Betrachtungen einbezogen. Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung wurden von I. Newton und – etwa zeitgleich – von G.W. Leibniz formuliert. Ausformulierung erfolgte durch A.L. Cauchy und Zeitgenossen.

[1] Infinite Prozesse sind Prozesse ohne Ende: jede Behauptung “jetzt ist aber Schluss” erweist sich als unzutreffend, weil man immer noch einen Schritt weiter gehen kann.

## 8.1 Zahlenfolgen, Konvergenz und Grenzwert

Sie erinnern sich: Eine **Zahlenfolge** ist eine auf $\mathbb{N}$ definierte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, sofern es sich um eine reelle Folge handelt, und Werten in $\mathbb{C}$, sofern es sich um eine komplexe Folge handelt. Statt $a(n)$ für den Wert der Folge an der Stelle $n$, wie es für Funktionen üblich ist, notiert man $a_n$, genannt das $n$-te Glied der Folge. Die Folge selber schreibt man dann auch $(a_n)$ oder einfach $a_1, a_2, \ldots$.

**Definiton:** Eine Folge $(a_n)$ heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl $a$ gibt, die die Eigenschaft aufweist, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon \tag{8.1}$$

Die Zahl $a$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge, notiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{bzw. } a_n \to a \text{ für } n \to \infty \tag{8.2}$$

Der Ausdruck $n \to \infty$ ist dabei nicht zu lesen "wenn $n$ den Wert 'unendlich' erreicht" (eine Zahl mit einem solchen Wert gibt es nicht), sondern "$n$ wächst über alle Grenzen" (es lässt sich kein $N \in \mathbb{N}$ angeben, so dass für alle $n$ gilt $n \leq N$).

Geometrisch kann die Konvergenzbedinung für komplexe Folgen formuliert werden, dass alle Folgenglieder $a_n$ mit $n > N_\varepsilon$ in einer Kreisscheibe

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C}|\, |z - a| < \varepsilon\} \tag{8.3}$$

der sog. $\varepsilon$-**Umgebung** von $a$ liegen. Für reelle Folgen ist die $\varepsilon$-Umgebung das Intervall $I_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}|\, |x - a| < \varepsilon\}$.

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt auch **Nullfolge**. Die Folge $(\frac{1}{n})$ beispielsweise ist eine Nullfolge: für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ setze $N_\varepsilon := 1/\varepsilon$. Für alle $n > N_\varepsilon$ ist dann $1/n < 1/N_\varepsilon = \varepsilon$, wie für eine Nullfolge gefordert.

 ©Martin Wilkens

Hat man eine konvergente Folge $a_n$ mit Grenzwert $a$, also $a_n \to a$, so ist $(a_n - a)$ offensichtlich eine Nullfolge. Eine Folge, die keinen Grenzwert aufweist, heißt *divergent*. Die Folge $(2^n)$, beispielsweise, ist divergent. Aber auch die Folge $((-1)^n)$ konvergiert nicht, gilt daher als divergent (besser: "nicht konvergent").

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Seien nämlich $a$, $b$ Grenzwerte der Folge $x_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Folge nach Voraussetzung konvergiert gibt es ein $n > N$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$, $|x_n - b| < \varepsilon$, woraus

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < 2\varepsilon \tag{8.4}$$

folgt. Und da $\varepsilon$ beliebig, insbesondere beliebig klein (und positiv), ist $a - b = 0$ bzw. $a = b$. qed

Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier – allgemein: endlich vieler – konvergenter Folgen sind gliedweise erklärt. Die resultierende Folge konvergiert dann gegen einen Grenzwert, der gleich der Summe, Differenz, Produkt oder Quotient der ursprünglichen Folgen ist (eine Ausnahmen ist die Division durch 0). Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + 0 = 1 \tag{8.5}$$

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{2} \tag{8.6}$$

Das ist typisch Mathe: ausgehend von einem "Basisobjekt" (hier : Zahl) führt man zunächst ein "Metaobjekt" ein (hier: Zahlenfolge), vereinbart "Metametaobjekte" (hier: Grenzwert von Zahlenfolge), und sucht dann die Verknüpfungen, die auf der Ebene der Basisobjekte bereits eingeführt sind (hier: die Arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), auf die Ebene der Metaobjekte zu erweitern (hier: die "Addition" zweier Folgen wird über die bereits etablierte Addition von Folgengliedern= Zahlen definiert), so dass sich die Erweiterung auf die Ebene der Metametaobjekte fortsetzen lässt (hier: Limes einer Summe zweier Folgen ist die Summe der Limiten der beiden einzelnen Folgen).

Eine Folge $(a_n)$ heißt

> **beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl $K \geq 0$ gibt, so dass für alle Folgenglieder $|a_n| \leq K$,
>
> **monoton wachsend**, wenn für alle $n$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$,
>
> **monoton fallend**, wenn für alle $n$ gilt $a_{n+1} \leq a_n$.

Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)$ ist beschränkt – aber Beschränktheit ist lediglich notwendige Bedingung für Konvergenz, nicht hinreichend. Die Folge $(-1)^n$, beispielsweise ist beschränkt, aber keineswegs konvergent. Notwendig und hinreichend ist Beschränktheit allerdings für solche Folgen, die monoton wachsen oder fallen.

Folgen eignen sich auch, um Zahlenmengen zu charakterisieren. Etwa so: Eine Teilmenge $M$ von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt

> **abgeschlossen**, wenn jede konvergente Folge von Elementen $a_n \in M$ einen Grenzwert $a$ in $M$ hat.
>
> **beschränkt**, wenn es eine Zahl $R$ gibt, so dass $|x| \leq R$ für alle $x \in M$
>
> **kompakt**, wenn $M$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Die mit Abstand nettesten Mengen sind die kompakten Mengen – in ihnen bleibt


©Martin Wilkens

immer allles schön endlich und man stößt in ihnen nicht auf Überraschungen.[2]. So ist beispielsweise jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen (gut so – abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen), und – da beschränkt – auch kompakt. Hingegen ist das rechtsseitig offene Intervall $[a, b[$ zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen – der Grenzwert der Folge $a + (b - a)/2^n$ ist $b$, und liegt somit nicht in $[a, b[$ – und daher ist $[a, b[$ halt beschränkt, aber nicht kompakt.

Eine reelle oder komplexe Zahl $h$ heißt **Häufungswert** der Folge $(a_n)$, wenn jede Umgebung $U_\varepsilon(h)$ von $h$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ enthält, wenn also gilt $|h - a_n| < \varepsilon$ für unendlich viele $n$. Eine konvergente Folge hat demnach genau ihren Grenzwert als Häufungspunkt, die nicht-konvergente Folge $((-1)^n)$ hat die Häufungspunkte 1 und $-1$, ... und eine surjektive Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ hat jede(!) reelle Zahl als Häufungswert (da jedes Intervall unendlich viele rationale Zahlen enthält). Das ist ziemlich cool – kann man doch die reellen Zahlen als die Menge aller Häufungswerte solcher Folgen rationaler Zahlen einführen!

**Satz (Bolzano-Weierstrass):** Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt mindestens einen Häufungswert. Äquivalent: Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

**Definition:** Eine Folge $(a_n)$ ist eine **Cauchy-Folge**, auch genannt **Fundamentalfolge**, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $N_\varepsilon$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \leq N_\varepsilon. \tag{8.7}$$

Bei einer Cauchy-Folge ziehen sich der Abstand der Folgenglieder mit wachsendem $n$ immer mehr zusammen. Von einem Grenzwert ist dabei nicht die Rede. Es gilt

[2] Eine Überraschung bietet beispielsweise die Folge $(1 + n^{-1})^n$. Das ist nämlich eine Folge in der Menge der rationalen Zahlen zwischen 1 und 3, und die Überraschung ist, dass der Grenzwert – die Eulerzahl $e$ – keine rationale Zahl ist. Oops ...

aber der wichtige Satz: Eine Folge konvergiert genau dann in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) , wenn sie eine Cauchy-Folge ist (Ohne Beweis). Das ist eine wertvolle Einsicht, kann man doch über die Konvergenz (oder nicht-Konvergenz) einer Folge entscheiden ohne den Grenzwert angeben zu müssen.

Cantor hat seinerzeit die rellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen in den rationalen Zahlen konstruiert. Beispiel: $e_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist eine Cauchy-Folge in den rationalen Zahlen. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} e_n := e$ (Eulers $e = 2,71\ldots$) ist allerdings nicht rational – er gestattet keine endliche Bruchdarstellung – ist aber Elemet der reellen Zahlen.

## 8.2 Reihen

Hat man eine beliebige Folge $(a_n)$, kann man daraus eine neue Folge $(S_N)$ bilden, die Folge der *Partialsummen* $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Hat die Folge $(S_N)$ einen Grenzwert, notiert man

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{8.8}$$

und nennt $\sum_n a_n$ eine **konvergente Reihe**. Andernfalls heißt die Reihe **divergent**.

Beispiel für eine konvergente Reihe (mit Hilfe von Partialbruchzerlegung)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) && (8.9)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} && (8.10)\\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} && (8.11)\\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} && (8.12)\\
&= 1\,. && (8.13)
\end{aligned}$$

Beispiel für eine divergente Reihe ist die sog. *harmonische* Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty. \tag{8.14}$$

wobei $\infty$ bedeutet “es gibt keine natürliche Zahl $N$ so dass $\sum \frac{1}{n} < N$”.

Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, worin $z$ eine beliebige komplexe (oder reelle) Zahl, heißen **Potenzreihe**. Eine gegebene Potenzreihe wird i.A. nicht für alle $z$ konvergieren, sondern nur für solche $z$ deren Betrag kleiner ist als der **Konvergenzradius** der Reihe. Die **geometrische Reihe** beispielsweise

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1 \tag{8.15}$$

konvergiert nur für $|z| < 1$. Es gilt nämlich $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}) = 1-z^N$, daher $1+z+z^2+\cdots+z^{N-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$, im Limes $N \to \infty$ folgt die Behauptung sofern nur $|z| < 1$.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe konvergiert oder nicht greift man gerne auf einfach zu entscheidende Kriterien zurück, das **Majorantenkriterium** beispielsweise: Existiert für eine gegebene Reihe $\sum a_n$ eine konvergente Reihe $\sum b_n = B$ und ist $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n$, so konvergiert auch $\sum a_n$. Beweis via Abschätzung des Reihenrestes: $|S - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \to 0$ für $N \to \infty$.

Von praktischer Bedeutung das **Quotientenkriterium**: Eine Reihe $\sum a_n$ bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder die Ungleichung $|a_{n+1}/a_n| \leq \delta < 1$ fast immer (d.h. bis auf endlich viele Ausnahmen) erfüllt, ist konvergent. Aus $|a_{n+1}/a_n| \leq \delta < 1$ folgt nämlich $|a_n| \leq \delta^{n-1}|a_1|$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1}|a_1|$ ist also eine Majorante von $\sum a_n$. Sofern $\delta < 1$ konvergiert die Majorante, nach dem Majorantenkriterium also auch die durch die Majorante majorisierte Reihe $\sum a_n$.

## 8.3 Exponentialfunktion . . .

Betrachte die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ worin $z$ irgendeine komplexe Zahl. Bildet man hier den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summanden, $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1}$ erkennt man, dass es für jedes $z$ ein $N$ gibt (etwa $N = \mathtt{INT}(|z|)$, worin $\mathtt{INT}(x)$ die Aufrundung von $x$ auf die nächst-größere ganze Zahl), so dass $\frac{|z|}{n+1} < 1$ für alle $n > N$, und also die fragliche Reihe für jedes $z$ konvergiert! Sie ist damit eine Funktion,

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{8.16}$$

genannt die **Exponentialfunktion**. Die Exponentialfunktion ist so etwas wie die Muttel aller Funktionen – weshalb wir ihr hier auch einen ganzen Abschnitt widmen.

Für $z, w$ zwei komplexe Zahlen berechnet sich das Produkt $\exp(z)\exp(w)$ wie folgt,

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\frac{w^n}{n!} \tag{8.17}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{z^m}{m!}\frac{w^{k-m}}{(k-m)!}\right) \tag{8.18}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}z^m w^{k-m} \tag{8.19}$$

$$= \sum_{k=0}\frac{1}{k!}(z+w)^k \tag{8.20}$$

kurz

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \exp(z+w)\,. \tag{8.21}$$

Aus Gl. (8.21) folgt unmittelbar $\exp(z)\exp(-z) = 1$, und das übersetzt sich mittels () in die Identität

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \tag{8.22}$$

Die Funktionalgleichung (8.21) erinnert an die Identität $a^p a^q = a^{p+q}$, und man schreibt daher

$$\exp(z) \equiv e^z \tag{8.23}$$

worin $e$ die Eulerzahl,

$$e := \exp(1) = 2,7182818 + R\,, \qquad |R| < 2\cdot 10^{-7} \tag{8.24}$$

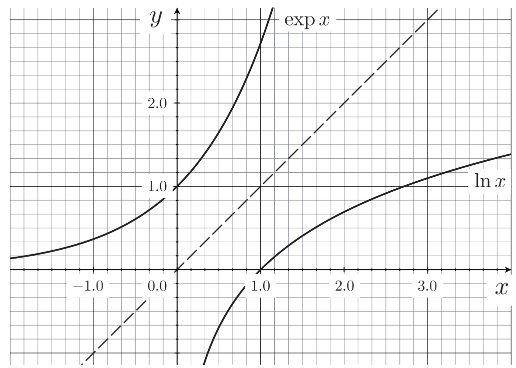


**Abb 8.1** *Die Exponentialfunktion für reelle Argumente nebst ihrer Umkehrfunktion* $\ln(x)$ *(deren Graph man durch "Spiegelung an der Diagonalen" erhält).*

Angesichts (8.23) nennt man die Exponentialfunktion auch die *e-Funktion*.

Zur Berechnung von $e^x$ mit $x$ reell bestimmt man zunächst eine ganze Zahl $g$ und nicht-negative reelle Zahl $\xi$ so dass $x = g + \xi$, bzw. $e^x = e^g e^\xi$. Zur näherungsweisen Bestimmung von $e$ und $e^\xi$ kann ein endlicher Abschnitt der Exponentialreihe verwendet werden. Die Abschätzung des Fehlers ergibt sich dabei wie folgt. Sei zunächst

$$e^x = \sum_{k=0} n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x) \tag{8.25}$$

dann gilt für $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) && (8.26)\\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) && (8.27)\\
&\leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,, && (8.28)
\end{aligned}$$

lies: für $|x| \leq 1$ ist der Fehlerbetrag höchstens so groß wie der doppelte Betrag des ersten weggelassenen Summanden. Verwendet man also zur Berechnung von $e$ den Abschnitt $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, so ist der Fehler $0 < R_{n+1}(1) < \frac{2}{(n+1)!}$. Dank der Fakultät im Nenner, konvergiert die Exponentialriehe für $e$ sehr schnell. Für $n = 10$ beispielsweise ist $R_{11}(1) < 6 \cdot 10^{-8}$, bzw. $e$ wie in Gl. (8.24) unter Berücksichtigung der Rundungsfehler angegeben.


©Martin Wilkens

## 8.4 . . . und Verwandte

Aus der Reihendarstellung (8.16) folgt $[\exp(z)]^* = \exp(z^*)$ bzw. für $z = x + iy$ mit $x, y$ reell,

$$[\exp(x + iy)]^* = \exp(x - iy) \tag{8.29}$$

Insbesondere wenn $z$ rein imaginär, $z = i\varphi$, ergibt sich

$$[\exp(i\varphi)]^* = \exp(-i\varphi) \tag{8.30}$$

und also $|\exp(i\varphi)| = 1$. Da jede komplexe unimodulare Zahl dargestellt werden kann $\cos\varphi + i\sin\varphi$ liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil von $\exp(i\varphi)$ mit der Darstellung $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ die Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen für reellwertig Argumente

$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \tag{8.31}$$

$$\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \tag{8.32}$$

Der Cosinus hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle, bezeichnet $\pi/2$, also $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, angesichts $\cos^2 + \sin^2 = 1$ auch $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Die Euler'sche Formel liefert dann $^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, quadriert

$$e^{i\pi} = -1 \tag{8.33}$$

eine der schönsten Formeln der modernen Mathematik, vereinigt sie doch Eulers $e$, Euklids $\pi$ Gauss' $i$ und die negative Einheit $-1$.

Es spricht nichts dagegen, für die trigonometrischen Funktionen auch komplexe Argumente zuzulassen. Man erweitere einfach die Definitionen, und setze für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,. \tag{8.34}$$

Die Reihendarstellung ist dann wie in (8.31,8.32) nur mit $\varphi$ ersetzt durch $z$.

Nach wie vor gilt hier die Euler'sche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,, \tag{8.35}$$

der Satz des Pythagoras

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \tag{8.36}$$

und die Additionstheoreme

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \tag{8.37}$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,. \tag{8.38}$$

Ebenso wie die trig-Funktionen könne auch die Hyperbelfunktionen für komplexe Argumente definiert werden,

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\,, \qquad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,. \tag{8.39}$$

Offensichtlich sind die Hyperbelfunktionen und die Trigonometrischen Funktionen verknüpft

$$\cosh z = \cos(iz)\,, \qquad \sinh z = -i \sin(iz)\,, \tag{8.40}$$

woraus sich mit Hilfe (8.38) Additionstheoreme angeben lassen,

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \tag{8.41}$$
$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w\,, \tag{8.42}$$

 ©Martin Wilkens

und es gilt der hyperbolische Pythagoras,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,. \tag{8.43}$$

Die Reihendarstellung entnimmt man (8.39) und Berücksichtigung von (8.16),

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{8.44}$$

## 8.5 Aufgaben

▷ **Aufgabe 8-1**

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\,. \tag{8.45}$$

▷ **Aufgabe 8-2**

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^s} = 0 \text{ für jedes positives } s\in\mathbb{Q}. \tag{8.46}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \text{ für jedes reelle } a>0. \tag{8.47}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{8.48}$$

▷ **Aufgabe 8-3**

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\,. \tag{8.49}$$

Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung des Summanden könnte sich als nützlich erweisen ...

▷ **Aufgabe 8-4**

Falls Sie sich jemals gefragt haben, wie man Wurzeln zieht (vulgo "$\sqrt{2}$ ausrechnet") – hier ist die Antwort: mit Hilfe der Rekursion

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \tag{8.51}$$

worin $a$ eine vorgegebene reelle Zahl größer Null (deren Wurzel man berechnen möchte).

(a) Berechnen Sie für den Fall $a = 2$ und Startwert $x_0 = 1$ die drei ersten Glieder der Folge (). Lassen Sie sich anschließend die Wurzel aus 2 von Ihrem Taschenrechner anzeigen und vergleichen Sie $x_3$ mit der Anzeige Ihres Taschenrechners.

(b) Zeigen Sie: Bei beliebig gewähltem Startwert $x_0 > 0$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ und die Folge () konvergiert ab $n = 1$ monoton fallend gegen $\sqrt{a}$.

(c) Zeigen Sie, dass der Fehler $f_n := x_n - \sqrt{a}$ abgeschätzt wird $|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$. Schließen Sie, dass für $x_3$ im obigen Beispiel $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-4} \cdot 10^{-4}$. Auf wieviele Stellen (hinter dem Komma) approximiert also $x_3$ die Zahl $\sqrt{2}$?

### ▷ Aufgabe 8-5

Man skizzieren der Funktionsgraphen der Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ (für reelle $z = x$) und beweise

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} , \qquad |z| < 1 . \tag{8.55}$$

Warum ist hier die Einschränkung $|z| < 1$ vorzunehmen? Was passiert für $z \to \pm i$ auf der linken Seite und auf der rechten Seite der Identit—ät (8.55)?

### ▷ Aufgabe 8-6 (Pythagoräische Weihnachen)

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon), tragen die Diagonalen ein, erhalten so ein Pentagramm, und überzeugen sich davon, dass hier gilt

$$\text{Diagonale} : \text{Seite} = \text{Seite} : (\text{Diagonale} - \text{Seite}) \tag{8.56}$$

Hinweis: Die Diagonalen bilden in der Mitte wiederum ein Pentagon – hilft das weiter?

Benennen Sie

$$g := \text{Diagonale} : \text{Seite} \tag{8.57}$$

und zeigen dass $g$ nicht rational.

Die Zahl $g$ nennt man den *goldenen Schnitt*. Betrachten Sie zum Startwert $x_0 = 1$ die Folge

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \tag{8.58}$$

und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ mit

$$g = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) . \tag{8.59}$$

Gehen Sie auf Wikipedia, und lesen dort unter dem Stichwort “Pythagoräer” und “Goldener Schnitt” nach, was es mit den beiden auf sich hat.


©Martin Wilkens