Kapitel 9

Elemente der Differentialrechnung

9.1 Stetigkeit

“Natura non saltum facit” fasst Leibniz das Credo abendländischer Naturphilosophie zusammen: die Natur macht keinen Sprung.[1] Prosaisch, in der Fachsprache der Physik: Funktionen, die physikalische Prozesse beschreiben, sind stetig.[2]

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in D$, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta. \tag{9.1}$$

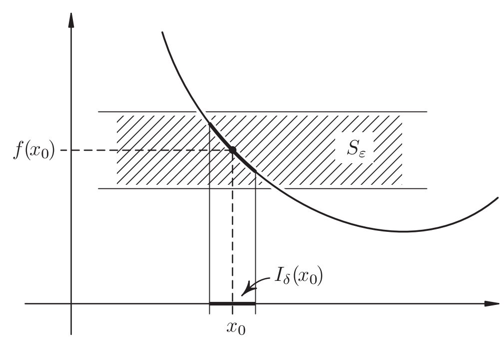

Abb 9.1 *Geometrisch Deutung der Stetigkeit für den Fall $D \subset \mathbb{R}$ und f reell: Zu jedem beliebig schmal vorgegebenen Streifen $S_\varepsilon = \{(x,y)|f(x_0)-\varepsilon < y < f(x_0)+\varepsilon\}$ gibt es ein Intervall $I_\delta(x_0) := \{x|x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta\}$, so dass der Graph über diesem Intervall innerhalb dieses Streifens verläuft.*

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz *Nouveaux Essais sur L'entendement humain* (dt: Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand), 1704.

[2]Die Quantenmechanik ist hier keine Ausnahme. Die sog. *Quantensprünge* sind allegorisch, nicht wörtlich, zu verstehen.

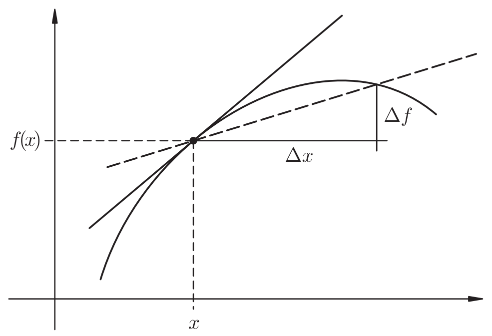

Abb 9.2 *Geometrische Deutung der Ableitung. Es ist $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.*

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig, so heißt f schlicht "stetig".

Sind f, g stetig in x_0, dann sind auch $f + g$ und fg stetig in x_0. Sei nämlich (x_n) eine Punktfolge in D mit $x_n \to x_0$, dann gilt angesichts Stetigkeit $f(x_n) \to f(x_0$ und $g(x_n) \to g(x_0)$, nach den Rechenregeln für Folgen also $(f + g)(x_n) \to (f + g)(x_0)$ und $(fg)(x_n) \to (fg)(x_0)$, somit $(f + g)$ und fg stetig in x_0, wie behauptet. Als Folgerung darf man schließen dass die rationalen Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig sind, die Polynome insbesondere in ganz $\mathbb{C}$.

9.2 Differenzierbarkeit

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar bei** $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9.2}$$

exisitert.

Ist f für alle $x_0 \in D$ differenzierbar, so heißt f schlicht "differenzierbar".

Geometrische Deutung des Differentialquotienten: Für f reell und $\varepsilon > 0$ ist die inhomogen lineare Funktion

$$\ell_\varepsilon(x) := f(x_0) + \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}(x - x_0) \tag{9.3}$$

die Sekante durch die Punkte $P_0 := (x_0, f(x_0))$ und $P_\varepsilon = (x_0 + \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon))$. Ist f in x_0 differenzierbar, so geht deren Steigung beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ gegen $f'(x_0)$ und die durch $\ell_{\varepsilon \to 0}$ definierte Gerade ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt P_0. Merksatz: Ableitung ist die Steigung der Tangente.

Anders formuliert: Betrachtet man alle (inhomogen) linearen Funktionen $g_a(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ durch den Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$, gilt für die Differenz $f(x) - g(x)$ im Limes $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g_a(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - a\,. \tag{9.4}$$

Für die spezielle Wahl $a = f'(x_0)$ wird hier der Unterschied zwischen $g_a(x)$ und $f(x)$ bei Annäherung an den Wert x_0 so klein, dass er selbst nach Division durch $x - x_0$ noch gegen Null geht. In diesem Sinne vermittelt die Tangente von allen Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ die "beste Approximation" an eine gegebene Funktion $x \mapsto f(x)$ bei $x = x_0$. Ist die Funktion f bei x_0 mindestens zweimal differenzierbar, schreibt man gerne

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{9.5}$$

worin $O(\epsilon^2)$ für gegebenes x erfüllt $\lim_\varepsilon O(\varepsilon^2)/\varepsilon = 0$.

Die Zahl $f'(x_0)$, genannt die **Ableitung** oder **Differentialquotienten** von f an der Stelle x_0, wird auch alternativ notiert

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x = x_0}\,. \tag{9.6}$$

Insbesondere wenn die Funktion anonym bleibt, sie beispielsweise nur durch einen Term wie $x^2{+}3$ angegeben ist, kommt diese Notation zum Einsatz, etwa so: $\frac{d}{dx}(x^2 + 3)\big|_{x=5} = 10$. Es wäre übrigens völlig idiotisch, hier erst $x \to 5$ zu setzen, und dann zu schreiben $\frac{d}{d5} 28 = 10$.

Die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ und der identischen Funktion $f(x) = x$ lassen sich aus der Defintion (9.2) direkt ablesen,

$$\frac{d}{dx} c = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} x = 1\,. \tag{9.7}$$

Um die Ableitung anderer Funktionen zu bestimmen, brauchen wir nicht die Defintion mit ihrem Limes bemühen, sondern greifen stattdessen auf einige nützliche Ableitungsregeln zurück …

9.3 Ableitungsregeln

Satz: Funktionen f und g seien in x differenzierbar; dann sind $f+g$ sowie gf und – sofern $g(x) \neq 0$ – auch f/g in x differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \textbf{Additionsregel} \tag{9.8}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textbf{Produktregel} \tag{9.9}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \qquad \textbf{Kettenregel} \tag{9.10}$$

Die Additionsregel folgt direkt aus der Vertauschung von Limes und Summe

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon) - (f(x) + g(x))}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} \\ &= f'(x) + g'(x)\,. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Die Produktregel beweist man, indem man den Differenzenquotienten umschreibt

$$\frac{f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) - f(x)g(x)}{\varepsilon} = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} g(x+\varepsilon) + \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} f(x) \tag{9.12}$$

und anschließend den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vollzieht. Die Kettenregel beweist man unter Verwendung von (9.5)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(f(x+\varepsilon)) - g(f(x))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(f(x) + f'(x)\varepsilon) - g(f(x))}{\varepsilon} \tag{9.13}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(y) + g'(y)\varepsilon f'(x) - g(y)}{\varepsilon} \tag{9.14}$$

$$= g'(f(x))f'(x) \tag{9.15}$$

Für f, g bei x_0 stetig differenzierbar beweist man mittels Produktregel und Kettenregel für den Fall $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \textbf{Quotientenregel}\,. \tag{9.16}$$

Ich persönlich kann mir die Quotientenregel nie merken. Kein Problem: mann kann sie sich ja mittels Produkt- und Kettenregel einfach herleiten.

Für den Fall, dass g bei x_0 eine Nullstelle aufweist, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, aber $f(x_0) \neq 0$, so ist f/g bei x_0 nicht stetig, und also gleich gar nicht differenzierbr. Haben aber sowohl g als auch f bei x_0 eine Nullstelle, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, gilt unter der Bedingung $g'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \textbf{De L'Hospital'sche Regel}\,, \tag{9.17}$$

wie man mittels der Approximationsformel (9.5) leicht beweist.

Mittels vollständiger Induktion und unter Zuhilfenahme der Produktregel beweist man

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}\,, \tag{9.18}$$

und daraus – unter Zuhilfenahme der Summenregel – die Ableitung eines Polynoms,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} x^n\,. \tag{9.19}$$

Angewendet auf die Exponentialreihe (8.16) für reelle Argumente

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \tag{9.20}$$

und da $e^{\ln x} = x$ führt hier die Anwendung der Kettenregel auf

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}\,. \tag{9.21}$$

Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen cos und sin gewinnt man über ihre jeweiligen Reihendarstellung (8.31) und (8.32)

$$\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)\,, \qquad \frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\sin(ax)\,. \tag{9.22}$$

9.4 Höhere Ableitungen, Extrema

Die Funktion $|x|$ ist bei $x = 0$ stetig, dort aber nicht differenzierbar. Eine stetige Funktion braucht also nicht überall differenzierbar zu sein. Ist aber eine Funktion differenzierbar, so ist sie erst recht stetig. Und ist auch die Ableitung stetig, so heißt f **stetig differenzierbar**.

Verallgemeinert: Eine Funktion heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn $f^{(k-1)}$ differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig. Sie ist dann vom Typ $\mathcal{C}^k$. Reelle Funktionen vom Typ $\mathcal{C}^k$, ausgestattet mit der Erlaubnis zur punktweisen Addition, der Multiplikation mit reellen Zahlen und der Vereinbarung eines o-Elements $o(x) = 0$ bilden einen Vektorraum – den Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Wenn Sie sich irgendeine Funktion ausdenken, und diese plotten, stellen Sie fest, dass Ihre Funktion Höhen und Tiefen – technisch: Maxima und Minima – aufweist. Man sagt, ein Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein **lokales Maximum**, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in U \cap D$, ein *globales Maximum*, wenn $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in D$. Entsprechend ist ein **lokales Minimum** definiert.

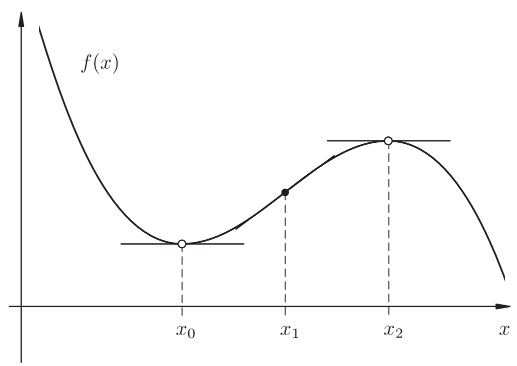

Abb 9.3 *Bei x_0 ein lokales Minimum, bei x_1 ein Wendepunkt, und bei x_2 ein lokales Maximum.*

Minima und Maxima nennt man die **Extrema** einer Funktion, die jew. x-Werte heißen ihre*Extremalstellen*. Kandidaten für die Extremalstellen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind (i) die Randpunkte a und b, (ii) die Punkte $x \in]a,b[$, in denen f nicht differenzierbar (Knick o.ä.), (iii) die Punkte $x \in]a,b[$, in denen $f'(x) = 0$. Wohlgemerkt – jeder dieser Punkte kann, muss aber nicht eine Extremalstelle sein.

Von praktischer Bedeutung sind Extremalstellen glatter Funktionen – denken Sie nur an Ihre Schulzeit, Stichwort Kurvendiskussion. Sei also f zweimal differenzierbar in x_0, und sei $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum, und sofern $f''(x_0) < 0$ ein lokales Maximum. Sofern hier $f''(x_0) = 0$ hat f weder ein lokales MInimum noch ein lokales Extremum, sondern einen sog. *Wendepunkt*. Paradebeispiele sind (i) die quadratische Funktion $f(x) = x^2$, die ein Minimum bei $x = 0$ aufweist, (ii) die Funktion $f(x) = -x^2$, die ein Maximum bei $x = 0$ aufweist, und (iii) die Funktion $f(x) = x^3$ die bei $x = 0$ einen Wendepunkt aufweist.

9.5 Aufgaben

▹ Aufgabe 9-1

Die Zahl radioaktiver Atome in einem radioaktiven Präparat zerfalle nach dem Gesetz $N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$. Welche Bedeutung haben die Größen N_0 und κ? Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Atome halbiert?

▹ Aufgabe 9-2

Einem Praktikumsbericht entnehmen Sie eine Messdatenkurve, die in doppelt-logarithmischer Auftragung von der Form einer Geraden durch den Punkt $(\xi_0 = 3, \eta_0 = 2)$ mit Steigung $\frac{3}{2}$ ist. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt die Kurve dar? Machen Sie sich ein Bild (Funktionsgraph)!

Hinweis: “Doppelt-Logarithmisch heißt, dass beide Achsen logarithmisch geteilt sind, also statt x und y sind $\xi = \log_a x$ und $\eta = \log_a y$ aufgetragen, wobei üblicherweise $a = 10$.

▹ Aufgabe 9-3

Eine Folge von Funktionen $(f_n : D \to \mathbb{C})$ heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ der Funktionswerte konvergiert. Ist das der Fall, wird durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in D \tag{9.23}$$

die sog. *Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{C}$ definiert. Dabei kann es passieren, dass zwar jedes Folgenglied f_n stetig, die Grenzfunktion f aber unstetig. Dazu ein Beispiel.

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass für jedes n die Funktion f_n

stetig auf $[0,1]$, dass aber die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1\,, \\ 1 & \text{für } x = 1\,. \end{cases} \tag{9.24}$$

unstetig auf $[0,1]$.

▷ Aufgabe 9-4

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$(a) \quad e^{-x}(\sin x - \cos x) \tag{9.25}$$

$$(b) \quad \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} \tag{9.26}$$

$$(c) \quad \log_a x \tag{9.27}$$

$$(d) \quad \sin(\sin x) \tag{9.28}$$

▷ Aufgabe 9-5

Der Tangens, daran sei erinnert, ist definiert $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion, also $\tan(\arctan x) = x$. Beweisen Sie

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{9.29}$$

▷ Aufgabe 9-6

Skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto x^x$ für $x > 0$, bilden ihre Ableitung, und skizzieren Sie auch die Ableitung. Was wäre die Ableitung der Funktion $\frac{d}{dx}x^x$? Skizze?

▷ Aufgabe 9-7

Für höhere Ableitungen, daran sei erinnert, benutzt man die abkürzende Schreibweise $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n}$, mit $f^{(0)} := f$. Beweisen Sie, für n-mal differenzierbare Funktionen f, g, die *Leibnizregel*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \,. \tag{9.30}$$