Kapitel 10

Elemente der Integralrechnung

Hat man eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, worin D irgendein Intervall, kann man sich für die Fläche interessieren, die "zwischen Funktionsgraph und X-Achse" liegt, von links und rechts von den Grenzen eines Intervalls $[a,b] \subset D$ begrenzt wird, und mit positivem (negativem) Vorzeichen verbucht wird, wenn der Funktionsgraph oberhalb (unterhalb) der X-Achse verläuft. Der mathematische Begriff für diesen "orientierten" Flächeninhalt ist das *Integral*

$$\int_a^b dx f(x)\,, \tag{10.1}$$

wenn es denn existiert (=einen endlichen Wert hat) – die Funktion f also über $[a,b] \subset D$ "integrierbar" ist.

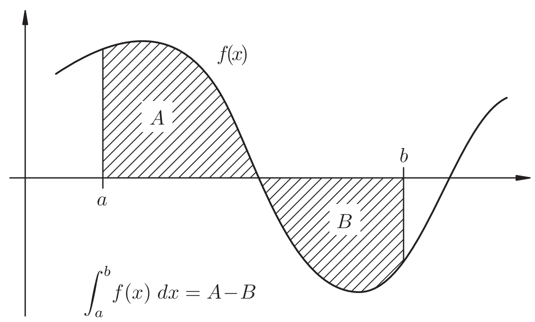

Abb 10.1 *Geometrische Deutung des Integrals.*

Die "elementarste Fläche" die man sich vorstellen kann ist die Fläche eines Rechtecks, und so steht am Anfang der Integralrechung die Definition

$$\int_a^b dxc := (b-a)c \tag{10.2}$$

lies: das Integral der konstanten Funktion $f(x) = c$ über dem Intervall $[a, b]$ hat den Wert $(b - a)c$.

10.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Um die Fläche für eine allgemeine Funktion einzugrenzen, nimmt man die Funktion “in die Zange”.[1] Man unterteilt das Integrationsintervall

$$a := x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n := b\,, \tag{10.3}$$

und wählt für jedes Subintervall $[x_{i-1}, x_i]$

$$k_i \leq f(x) \leq h_i\,, \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i \tag{10.4}$$

Die Unterteilung (10.3) zusammen mit den Begrenzungen (10.4) bilden die Daten einer Zange Z für die Funktion f. Der orientierte Flächeninhalt der unteren (oberen) Greifbacke der Zange heißt die *Untersumme (Obersumme)* der Zange,

$$U(Z) := \sum_i k_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \qquad O(Z) := \sum_i h_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \tag{10.5}$$

[1] aus: Jänich *Mathematik 1*, S. 41– 60. Gegenüber dem üblichen Vorgehen, bei dem die zu integrierende Funktion durch Treppenfunktionen von obern bzw. unten approximiert wird, kann bei Verwendung von Zangen auf die Diskussion der Approximation von stetigen Funktionen durch Folgen untstetiger Funktionen (Treppenfunktionen) verzichtet werden.

und die Differenz

$$O(Z) - U(Z) = \sum_i (h_i - k_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{10.6}$$

heißt die *Toleranz* der Zange Z.

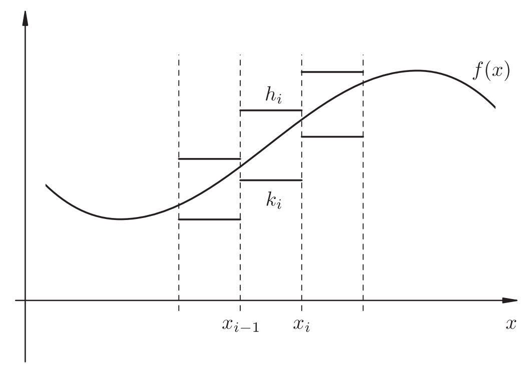

Abb 10.2 *Eine Funktion in der Zange.*

Definition: Eine Funktion heißt **Riemann-integrierbar** wenn sie beschränkt ist und sich zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zange Z um f mit einer Toleranz $O(Z) - U(Z) < \varepsilon$ angeben läßt.

Ist f Riemann-integrierbar, so gibt es genau eine Zahl I für die $U(Z) \leq I \leq O(Z)$ für alle Zangen, in die f genommen werden kann, und diese Zahl heißt das **Integral** von f über $[a, b]$, notiert

$$\int_a^b dx f(x) \tag{10.7}$$

(Beweis: Jänich *Mathematik 1*, S. 519–520).

10.2 Rechenregeln

Jede beschränkte Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar und es gelten die Rechenregeln

$$\int_a^b dx\ f(x) = -\int_b^a dx\ f(x) \tag{10.8}$$

$$\int_a^b dx(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \tag{10.9}$$

$$\int_a^c dx\; f(x) = \int_a^b dx\; f(x) + \int_b^c dx\; f(x) \tag{10.10}$$

Regel (10.8) berücksichtigt die Orientierung beim Umlaufen von Flächen; Regel (10.9) besagt, dass Integration eine **lineare Abbildung** auf dem Vektorraum der Riemann-integrablen Funktionen, und Regel (10.10) sagt, dass Flächen unter Berücksichtigung der Orientierung additiv sind.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Für $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in D$ gilt

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^x dt f(t) = f(x) \tag{10.11}$$

auf ganz D.

Der Beweis beruht auf der Regel (10.10) uns ist ansonsten einfach zu führen. Man beachte, dass die linke Seite von der unteren Integrationsgrenze abhängt, die rechte Seite aber nicht.

Definition: Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ stetig heißt **Stammfunktion** von f.

Offensichtlich ist mit F auch $F + c$ Stammfunktion (denn die Ableitung der konstanten Funktion c ist Null).

Hat man eine Stammfunktion gefunden, kennt man alle (man muss zu seinem Fund nur eine irgendwie gewählte Konstante hinzufügen).

Mittels Stammfunktion schreibt sich das **bestimmte Integral**

$$\int_a^b dx\; f(x) = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b\,. \tag{10.12}$$

was etwas missverständlich anmutet, taucht doch im Ausdruck ganz rechts auch wieder der Name der Integrationsvariablen auf ....

10.3 Beispiele

Wenn man hier die obere Grenze als variabel auffasst, würde man pedantisch notieren $\int_a^x dt f(t) = F(x) - F(a)$. In Integraltafeln oder ähnlichen Formelwerken verzichtet man auf Pedantik, lässt die untere Integrationsgrenze unbenannt, und lässt $F(a)$ unter den Tisch fallen. Mit dieser Konvention die Notation betreffend lassen sich mit Blick auf ()–() die Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen leicht angeben,

$$\int^x dt\ t^s = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \tag{10.13}$$

$$\int^x dt\ e^{\kappa t} = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa x} \tag{10.14}$$

$$\int^x dt\ \sin(kt) = -\frac{1}{k} \cos(kx) \tag{10.15}$$

$$\int^x dt\ \cos(kt) = \frac{1}{k} \sin(kx) \tag{10.16}$$

Ist $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ für jedes $0 < \varepsilon < b - a$ über $[a + \varepsilon, b]$ integrierbar, so heißt der Grenzwert

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^b dx f(x) \tag{10.17}$$

das **uneigentliche Integral** von f über $]a, b]$. Für Funktionen, die über ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, heißt entsprechend $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) := \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b dx f(x)$ das uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$.

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar (da für $x \to 0$ nicht beschränkt). Allerdings existiert das uneigentliche Intgeral $\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}}$, denn

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\,\sqrt{x}\Big|_a^b = 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) \tag{10.18}$$

und also $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_\varepsilon^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

10.4 Partielle Integration und Substitution

Beim Ausrechen von Integralen sind zwei Techniken von hervorragender Bedeutung, genannt *partielle Inegration* und *Substitution*. Die **partielle Integration** basiert auf der Identität $(fg)' = f'g + g'f$, umgestellt $f'g = (fg)' - fg'$, integriert

$$\begin{aligned} \int_a^b dx f'(x) g(x) &= \int_a^b dx\ (fg)'(x) - \int_a^b dx\ f(x) g'(x) && (10.19) \\ &= fg\Big|_a^b - \int_a^b dx\ f(x) g'(x) && (10.20) \end{aligned}$$

auch treffend genannt “Abwälzen der Ableitung”.

Bei der Technik der **Substituion** wird die Integrationsvariable als abhängige Variable einer geschickt gewählten Funktion aufgefasst, $x = \phi(t)$, und man schreibt

$$\int_a^b dx\ f(x) = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t) dt \tag{10.21}$$

10.5 Aufgaben

▷ **Aufgabe 10-1**

Gegeben eine Funktion

$$f(x) := \frac{1}{(x-a)(x-b)} \tag{10.22}$$

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. Wo erwarten Sie Probleme?

(b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von f für die drei Intervalle $x < a$, $a < x < b$ und $b < x$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung könnte sich bei (b) nützlich erweisen …

▷ **Aufgabe 10-2**

Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\int dx x \sin(x^2 - 1)\,, \qquad \int dx x \ln x\,. \tag{10.23}$$

▷ **Aufgabe 10-3**

Man beweise, dass mit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|$ (Betrag von f) Riemann-integrierbar, und

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int dx\, |f(x)|\ . \tag{10.24}$$