Kapitel 13

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Schaut man sich in der Physik um, stellt man fest, dass die viele Prinzipien und Naturgesetze in Form sog. **Differentialgleichungen** (kurz: DGL) formuliert werden. Das schon aus der Schulzeit bekannte ‘eff-gleich-em-mal-ahh” bzw. “em-mal-ahh-gleich-eff”, beispielsweise, notiert die Physikerin nach Identifikation der momentanen Beschleunigung $a(t)$ mit der momentanen Änderung der Geschwindigkeit, $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$, der momentanen Geschwindigkeit $v(t)$ mit der zeitlichen Änderung der Ortskoordinate, $v(t) = \frac{d}{dt}q(t)$, für vorgegebene Abhängigkeit der Kraft F vom Ort q, möglicherweise der Geschwindigkeit v und der Zeit t, ausführlich

$$m\frac{d^2}{dt^2}q(t) = F\left(q(t), \frac{d}{dt}q(t), t\right) , \tag{13.1}$$

genannt die *Newton'sche Bewegungsgleichung des Massepunktes.*[1] Weil hier außer der Koordinate q auch deren Ableitungen eingehen, ist die Newton'sche Bewegungsgleichung vom mathematischen Standpunkt eine Differentialgleichung, genauer eine *(gewöhnliche) Differentialgleichung zweiter Ordnung* – die höchst Ableitung ist schließlich von zweiter Ordnung.[2] Das Problem, dem sich die Physikerin dann in Anwendung des Naturgesetzes auf eine konkrete Situation konfrontiert sieht, ist eine Funktion $q(t)$ zu finden die einerseits Gl. (13.1) befriedigt, die andererseits für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 gewissen vorgegebenen Bedingungen, sog. *Anfangsbedingungen* genügt. In der Theorie der Differentialgleichungen wird geklärt, welcherart Lösungen eine gegebene DGL zulässt, und für welcher Art Anfangsbedingungen das Anfangswertproblem (kurz AWP) für diese DGL eindeutig lösbar ist. Für die Newton'sche Bewegungsgleichung, beispielsweise, erweist sich das AWP bei Vorgabe der Anfangslage $q_0 \equiv q(t_0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \equiv \frac{dq}{dt}\big|_{t=t_0}$ als eindeutig lösbar. Das physikalische Prinzip, wonach der Zustand eines Massepunkte zu jedem beliebigen Zeitpunkt durch Angabe seines Ortes und seiner Geschwindigkeit bereits vollständig festgelegt ist, findet hier seine mathematische Formulierung.[3]

[1]Das Prädikat "Newton'sch" bezieht sich dabei auf den Umstand, dass die Funktion F auf der rechten Seite lediglich eine Funktion der Koordinate q, eventuell der Geschwindigkeit $\dot{q}$ und der Zeit, nicht aber von höheren Ableitungen abhängt.

[2]Das Prädikat "gewöhnlich" bezieht sich dabei auf die Unterscheidung zu den sog. *partiellen Differentialgleichungen*, bei denen die Funktion (hier: q) von mehreren unabhängigen Variablen abhängt, und die Differentialgleichung neben der Funktion selber auch deren Ableitungen nach diesen unabhängigen Variablen involviert. Partielle DGL (kurz PDGL) lernen Sie im Sommersemeser kennen. Hier beschränken wir uns auf die gewöhnlichen DGL, im Unterschied zu den PDGL abgekürzt ODGL.

[3]Dass es nicht weiterer Angaben bedarf, etwa die Beschleunigung der Beschleunigung betreffend und so weiter ist eines der größten Einsichten Newtons. Und eines der fundamentalen Fundamente aller empirischen Wissenschaften: der Zustand eines Systems ist nur durch wenige Größen bestimmt. Höhere Ableitungen, die durch Details der Vorgeschichte bestimmt sind, spielen keine Rolle.

Grundsätzlich unterscheidet man lineare und nichtlineare Differentialgleichungen. Unter einer **nichtlinearen DGL** versteht man eine Differentialgleichung in der die gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen in einer anderen als der ersten Potenz erscheinen. Beispielsweise ist $\dot{q} = q^2$ eine nichtlineare DGL. Von wenigen – nichtdestotrotz wichtigen – Ausnahmen abgesehen gibt es keine allgemeine Lösungstheorie nichtlinearer DGL. In einer **linearen** Differentialgleichung erscheinen die Funktion selber und/oder ihre Ableitung mit Potenz 1. Die Schwingungsgleichung $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, beispielsweise, ist eine lineare Differentialgleichung. Die Lösungstheorie linearer DGL mit konstanten Koeffizienten (hier: ω_0) ist vollständig ausgearbeitet und komplett.

13.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Jede DGL erster Ordnung ist von der Form $F(y', y, x) = 0$, wo $y = y(x)$ und $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. Aufgelöst nach y' schaut man auf

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \,. \tag{13.2}$$

Hat man Glück ist die rechte Seite eine Proportion $f = -\frac{P(x)}{Q(y)}$. In diesem Fall kann man (13.2) durch **Separation der Variable** umformen

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \,, \tag{13.3}$$

und schließlich integrieren,

$$\int_{x_0}^{x} P(x')dx' + \int_{y_0}^{y} Q(y')dy' = 0 \,. \tag{13.4}$$

Der erste Term ist ein Funktion von x (die Stammfunktion von P zuzüglich einer Integrationskonstanten), der zweite Term ein Funktion von y (die Stammfunktion von Q zuzüglich einer Integrationskonstanten). Nach Ausführen der Integrationen und Auflösen nach y hat man die Lösung von (13.3). Man sagt dann, man habe die DGL durch **Quadratur** gelöst.[4]

Beispiel Das Boyle'sche Gesetz verknüpft Druck p und Volumen V eines Gases bei gegebener Gasmenge und Temperatur. MIt p als unabhängige Variable, und $V = V(p)$ als abhängige Variable lautet es in differentieller Form

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p}\,. \tag{13.5}$$

Separation der Variablen führt auf

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \qquad \text{bzw.} \qquad \ln V = -\ln p + C \tag{13.6}$$

wo C eine Integrationskonstante. Erinnert man sich an dieser Stelle an die Rechenregeln des Logarithmus, schaut man auf

$$pV = const. \tag{13.7}$$

wobei $const. = \ln C$.

Den allgemeinen Fall kann man auch formulieren $f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, entsprechend

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,. \tag{13.8}$$

Findet man hier eine Funktion $\Phi(x,y)$ mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$ heißt (13.8) **exakt**. Gibt es ein solches Φ ist notwendig

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)\,, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y) \tag{13.9}$$

[4] "Quadratur" ist ein schöner Begriff von ganz früher, der einen daran erinnert, dass Integrieren das Bestimmen von Flächen ist (unter dem Funktionsgraphen). Und das Bestimmen von Flächen ist halt die Zerlegung von Flächen in Quadrate ...

insbesondere

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \,. \tag{13.10}$$

Ist diese **Integrabilitätsbedingung** erfüllt, die DGL (13.8) also exakt, lässt sich $\Phi(x, y)$ wie in der Potentialtheorie bestimmen. Lösungen von (13.8) bzw (13.2) erhält man dann, indem man $\Phi(x, y) = const.$ nach y auflöst.

Sollte (13.8) nicht exakt sein, also $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, gibt es immer (mindestens einen) **integrierenden Faktor** $\alpha(x, y)$, so dass $\alpha P dx + \alpha Q dy = 0$ exakt. Leider gibt es kein allgemeingültiges Rezept, um einen solchen Faktor zu bestimmen. Lediglich für den Fall dass (13.2) eine lineare DGL kann ein solches Rezept angegeben werden.

Jede **lineare** ODGL erster Ordnung kann in die Form

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = g(x) \tag{13.11}$$

gebracht werden. Der integrierende Faktor $\alpha(x)$ wird dabei so gewählt, dass sich die mit α multiplizierte DGL (13.11) schreiben lässt

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha(x)y\right] = \alpha(x)g(x) \tag{13.12}$$

was ja nun wirklich schnell gelöst wäre

$$y(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\left\{\int^x \alpha(s)q(s)ds + C\right\} \tag{13.13}$$

Vergleich der linken Seite der mit α multiplizierten DGL (13.11) und der linken Seite von (13.12) fördert hier zu Tage, dass α selbst einer DGL zu genügen hat,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \alpha(x)p(x) \tag{13.14}$$

Diese DGL ist aber in den Variablen α und x separierbar, $\frac{d\alpha}{\alpha} = p(x)dx$, und also integrierbar

$$\alpha(x) = e^{\int^x p(s)ds} \tag{13.15}$$

Eingesetzt in (13.13) wäre $y(x)$ bestimmt. Das einzige was bleibt, ist Integrale auszurechnen.

13.2 Lineare Differentialgleichungen

Mit einem Auge auf die Physik setzen wir abkürzend $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$ etc bzw. allgemein $q^{(n)}$ für die $n$te Ableitung nach der unabhängigen Variable t. [5]

Unter einer **linearen Differentialgleichung** versteht man eine Gleichung der Form

$$\text{(L)} \qquad q^{(n)} + a_{n-1}q^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{q} + a_0 q = g(t) \tag{13.16}$$

worin $a_0 \ldots, a_{n-1}$ und g gegebene, stetige komplexe (oder reelle) Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die natürliche Zahl n definiert die **Ordnung** der DGL, bestimmt durch die höchste Ableitung. Die Funktion g nennt man die **Inhomogenität** der DGL (13.16), und eine Gleichung der Form

$$\text{(H)} \qquad q^{(n)} + a_{n-1}q^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{q} + a_0 q = 0 \tag{13.17}$$

die zu (13.16) gehörige **homogene** Gleichung. Achtung: der Buchstabe q fungiert hier lediglich als Platzhalter, in (13.16) steht er für eine Funktion, die die DGL (13.17) befriedigt, und in (13.16) für eine Funktion, die die DGL (13.17) befriedigt, wobei die beiden genannten Funktionen sich i.A. durchaus unterscheiden.

[5] In der Mathematik bezeichnet man mit $y(x)$ die unbekannte Funktion, x die unabhängige Variable und setzt abkürzend $y' := \frac{d}{dx}y$, $y'' = \frac{d^2}{dx^2}y$ etc. bzw allgemein $y^{(n)} := \frac{d^n}{dx^n}y$.

Unter einer Lösung der linearen DGL (13.16) versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion $I \to \mathbb{C}$ (oder $I \to \mathbb{R}$), die der Gleichung (13.16) genügt. Offenkundig gilt

(a) Sind q_a und q_b Lösungen von (L), dann ist die Differenz $q_b - q_a$ eine Lösung der homogenen Gleichung (H).

(b) Aus einer Lösung q_{L} von (L) entsteht jede weitere Lösung q durch Addition einer Lösung q_{H} der homogenen Gleichung, $q = q_{\mathrm{L}} + q_{\mathrm{H}}$.

Das Problem der Bestimmung aller Lösungen von (L) zerfällt demnach in zwei Teilprobleme

1. Ermittlung aller Lösungen der homogenen Gleichung (H)
2. Ermittlung wenigstens einer Lösung der inhomogenen Gleichung (L), in diesem Zusammenhang genannt eine **partikuläre Lösung**.

Aufgrund der Linearität der homogenen Gleichng (H) gilt, dass jede Linearkombination $c_1 q_1 + \ldots + c_k q_k$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) von Lösungen $q_1, \ldots, q_k$ der Gleichung (H) wiederum eine Lösung von (H). Der Gesamtheit der Lösungen von (H) bilden einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$), hier bezeichnet $\mathcal{L}$.[6] Im allgemeinen ist dieser Funktionenraum höchstens n-dimensional. Im wichtigen Fall, dass die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ allesamt konstant, ist der zugeordnete Funktionenraum sogar genau n-dimensional, wie weiter unten gezeigt wird.

Die Anwendung eines durch (L) beschriebenen Naturgesetzes beinhaltet häufig auch die Vorgabe von n sog. *Anfangswerten*

$$q(t_0), \dot{q}(t_0), \ldots, q^{(n-1)}(t_0)\,. \tag{13.18}$$

[6] Unbedingt zu beachten ist, dass jede DGL mit ihrem eigenen Funktionenraum $\mathcal{L}$ daherkommt.

Für die DGL des getriebenen Federpendels, $\ddot{q} + \frac{k}{m}q = \frac{1}{m}F(t)$, wären das die anfängliche Auslenkung $q(t_0) = x_0$ und die anfängliche Geschwindigkeit $\dot{q}(t_0) = v_0$, wobei mit "anfänglich" hier ein willkürlich gewählten Anfangszeitpunkt t_0 gemeint ist (meist $t_0 = 0$). Aus dem alltäglichen Umgang mit Federpendeln weiß man, dass die Vorgabe dieser beiden Daten ausreicht, um das Bewegung des Federpendels für Zeiten $t \geq t_0$ vollständig zu bestimmen. Verallgemeinert erhält man hier den

Satz (Eindeutigkeitssatz) Sofern das Anfangswertproblem der DGL (13.16) überhaupt lösbar ist, ist es eindeutig lösbar, d.h. es gibt genau eine Funktion q, die zum Zeitpunkt t_0 die vorgeschriebenen Werte (13.18) annimmt und die die DGL (13.16) befriedigt.

Der Beweis ist nicht anspruchsvoll, ist aber ein bisschen länglich, weshalb hier auf die Lehrbücher verwiesen wird.[7]

13.3 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ist eine DGL der Form (13.16) worin $a_0, \ldots, a_{n-1}$ komplexe (oder reelle) Konstanten sind. Das Paradebeispiel vermittelt das Teilchen an der Feder. Mit der Kraft $F = -kq$ erscheint Gl. (13.1) in der Form

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0\,, \tag{13.19}$$

aus naheliegenden Gründen genannt die **Schwingungsgleichung**.

Und macht man dort den Ansatz

$$q = e^{\lambda t} \tag{13.20}$$

[7]Beispielsweise Königsberger, Analysis I, S. 174f.

mit einer zunächst unbekannten Zahl λ – treffend genannt e-**Ansatz** – schaut man auf die Gleichung $(\lambda^2 + \frac{k}{m})e^{\lambda t} = 0$. Da $e^{\lambda t}$ Nullstellenfrei, kann hier durch $e^{\lambda t}$ gekürzt werden, und man schaut auf die Bestimmungsgleichung

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0\,, \tag{13.21}$$

unter Fachleuten genannt die **Säkulärgleichung** zu (13.19). Lösungen der Säkulärgleichung sind $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, bzw. $\lambda_\pm = \pm i\omega_0$ worin abkürzend $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die sog. **Eigenfrequenz** des Federpendels. Somit sind $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$ Lösungen der Schwingungsgleichung (13.19). Von der pathologischen Ausnahme $k = 0$ (freies Teilchen) abgesehen, sind diese beiden Funktionen linear unabhängig (es gibt keine Zahl α, so dass $\alpha e^{i\omega_0 t} = e^{-i\omega_0 t}$) und da die Zahl der linear unabhängigen Lösungen kleiner gleich der Ordnung n der DGL (hier $n = 2$), ist für $k \neq 0$ mit $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$ bereits eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}$ gegeben, kurz $\mathcal{L} = \{Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} | A, B \in \mathbb{C}\}$. In der gewohnten Non-Chalance der Physikerin sagt man: Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (13.19) hat für $k \neq 0$ die Form

$$q(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit der Abkürzung } \omega_0 = \frac{k}{m} \tag{13.22}$$

Ausgestatte mit dieser allgemeinen Lösung, kann nun auch das AWP angegangen werden. Für gegebene q_0 und v_0 schaut man auf zwei Gleichungen, die die unbestimmten Amplituden A und B festlegen,

$$q_0 \equiv q(t_0) = Ae^{i\omega_0 t_0} + Be^{-i\omega_0 t_0} \tag{13.23}$$

$$v_0 \equiv \dot{q}(t_0) = i\omega Ae^{i\omega_0 t_0} - i\omega_0 Be^{-i\omega_0 t_0} \tag{13.24}$$

Aufgelöst nach A und B,

$$A = , \qquad B = , \tag{13.25}$$

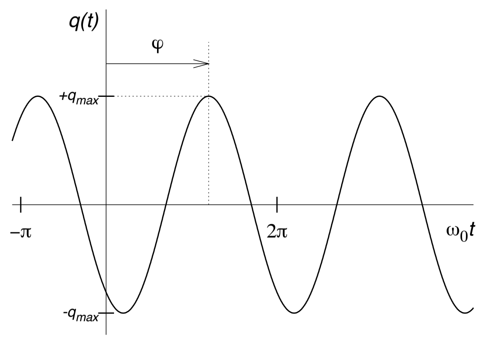

Abb 13.1 *Die harmonische Schwingung* $q(t) = q_{\max}\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ *mit Phase* $\varphi_0 = 1.2\pi$.

womit nun alles festliegt: die Lösung der DGL (13.19) zu Anfangswerten $q(t = t_0) = x_0$ und $\dot{q}(t = t_0) = v_0$ lautet

$$q(t) = \tag{13.26}$$

Man beachte, dass trotz der vielen komplexen Zwischenschritte die Lösung eine reelle Funktion – gut so, wer wüsste denn, was eine komplexe Auslenkung sein soll?

Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus lässt sich die Lösung auch schreiben,

$$q(t) = q_{\max}\cos(\omega_0 t - \varphi_0)\,, \tag{13.27}$$

wobei die beiden Integrationskonstanten $q_{\max}$ und φ_0, die **Amplitude** der Schwingung und ihre **Phase** sich durch die Anfangswerte ausdrücken

$$q_{\max} = \sqrt{q_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}\,, \tag{13.28}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0 q_0}\,. \tag{13.29}$$

Die Lösungstheorie der linearen DGL allgemeiner Ordnung n mit konstanten Koeffizienten läßt sich nun zusammenfassen:

Satz (Fundamentalsystem) Seien $\lambda_, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstallen des charakterisitschen Polynoms der DGL (13.17),

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{13.30}$$

und seien $k_1, \ldots, k_r$ deren jeweilige Vielfachheiten, dann hat (13.17) folgende linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda_i t}\,, \quad t \cdot e^{\lambda_i t}\,, \ldots\,, t^{k_i - 1} \cdot e^{\lambda_i t}\,, \qquad i = 1, \ldots r\,. \tag{13.31}$$

und jede Lösung von (13.17) ist eine Linearkombination dieser n Lösungen.

Das einzig Neue ist die Möglichkeit, dass P eine mehrfache Nulstelle aufweist, etwa $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$. In diesem Fall sind $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ nicht linear unabhängig. Um hier weiter zu kommen, betrachtet man die mehrfache Nullstelle λ als Grenzlage benachbarter Nullstellen λ und $\lambda+\Delta\lambda$. Mit $e^{\lambda t}$ und $e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}$ ist auch die Linearkombination $\frac{1}{\Delta\lambda}\left(e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} - e^{\lambda t}\right)$ Lösung, im Grenzfall $\Delta\lambda \to 0$ geht diese Lösung gegen $te^{\lambda t}$. Und diese Funktion ist offensichtlich einerseits Lösung von (H), andererseits sind $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$ linear unabhängig.

13.4 Variation der Konstanten

Seien $q_1, \ldots, q_n$ ein Fundamentalsystem von (H), und Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ so dass

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_n & \cdots & \dot{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{(n-1)} & q_2^{(n-1)} & \cdots & q_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \tag{13.32}$$

dann ist eine Partikuläre Lösung

$$q_p = U_1 q_1 + \ldots + U_n q_n \tag{13.33}$$

wobei U_i Stammfunktion von u_i.

Beispiel:

$$\ddot{q} + q = \frac{1}{\cos t} \tag{13.34}$$

Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos t \end{pmatrix} \tag{13.35}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan t \end{pmatrix} . \tag{13.36}$$

Stammfunktionen $U_1 = t$, $U_2 = \ln|\cos t|$, somit partikuläre Lösung

$$q_p(t) = t \cdot \sin t + (\ln|\cos t|) \cdot \cos t \tag{13.37}$$

13.5 Aufgaben

▷ Aufgabe 13-1 (Der linear gedämpfte harmonische Oszillator)

Realistische Teilchen erfahren eine Reibungskraft, die ihre Bewegung bremst. Der einfachste Fall ist die *lineare Reibungskraft*, auch *Stokes'sche Reibungskraft* oder *viskose Reibung*

$$\vec{F} = -\alpha\dot{\vec{q}}, \qquad \alpha \geq 0\,. \tag{13.38}$$

Deartige Reibungskräfte wirken beispielsweise auf nicht zu grøße Körper, die sich nicht zu schnell durch viskose Flüssigkeiten bewegen.[8]

Das Modell des linear gedämpften harmonischen Oszillators ist definiert durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} + \alpha\dot{q} + kq = 0\,. \tag{13.39}$$

Im Elektronikpraktikum begegenet Ihnen diese DGL wenn Sie sich mit dem LRC-Schwingkreis beschäftigen.

Bestimmen Sie das Fundamentalsystem und lösen Sie das AWP. Setzen Sie $\gamma_0 = \frac{\alpha}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (warum?), und diskutieren Sie insbesondere die Fälle (1) schwacher Dämpfung $\gamma_0 < \omega_0$, (2) Überdämpfung $\gamma_0 > \omega_0$, und (3) kritischer Dämpfung $\gamma_0 = \omega_0$. Warum, glauben Sie, wird bei vielen Messgeräten mit schwingungsfähigen Zeigern o.ä. die kritische Dämpfung eingestellt?

Lösung: Mit dem Exponentialansatz $q(t) = e^{\lambda t}$ ergibt sich die Säkulargleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma_0\lambda + \omega_0^2 = 0\,, \tag{13.40}$$

[8] Für den freien Fall von Menschen und ähnlich großen Kröpern durch Luft ist die Stokes'sche Reibung ein ungeeignetes Modell. An ihre Stelle tritt die Newton'sche Reibung $F \propto v^2$; vgl Meschede "Gerthsen-Physik" (21. Auflage), Kap 1.6; Budo "Theoretische Mechanik", Kap 16.

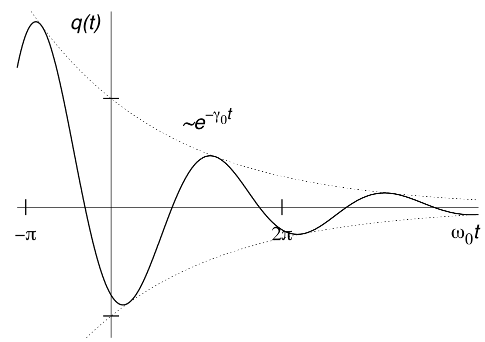

Abb 13.2 *Die schwach gedämpfte Schwingung; Dämpfungskonstante $\gamma_0 = 0.2\omega_0$; Phase $\varphi = 1.2\pi$.*

wobei ω_0 die Frequenz der ungedämpften Schwingung und γ_0 die sog *Dämpfungskonstante*

$$\omega_0 := \frac{k}{m}\,, \qquad \gamma_0 = \frac{\alpha}{2m}\,. \tag{13.41}$$

Lösungen der Säkulargleichung lesen sich

$$\lambda_\pm = -\gamma_0 \pm \sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}\,. \tag{13.42}$$

Die allgemeine Lösung der DGL (13.39) demzufolge

$$q(t) = Ae^{-(\gamma_0+\sqrt{\gamma_0^2-\omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma_0-\sqrt{\gamma_0^2-\omega_0^2})t} \tag{13.43}$$

Die Integrationskonstanten A und B können wie gehabt durch die Anfangswerte ausgedrückt werden,

$$A = -\frac{v_0 + \left(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}\right) q_0}{2\sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}} \tag{13.44}$$

$$B = \frac{v_0 + \left(\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}\right) q_0}{2\sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0^2}} \tag{13.45}$$

Im Fall schwacher Dämpfung, $\gamma_0 < \omega_0$, sind $\lambda_\pm$ komplex,

$$\lambda_\pm = -\gamma_0 \pm i\omega \tag{13.46}$$

mit Imaginärteil

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}\,. \tag{13.47}$$

Die Lösung (13.43) beschreibt eine gedämpfte Schwingung,

$$q(t) = (Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t})e^{-\gamma_0 t} \tag{13.48}$$

Der erste Faktor oszilliert harmonisch, allerdings mit einer Frequenz ω, die gegenüber der Frequenz des konservativen Oszillators gemäß () etwas reduziert ist: die Schwingung wird durch die Reibung verlangsamt. Der zweite Faktor sorgt für Dämpfung: die Amplitude der Schwingung ist nach einer Zeit $\tau := 1/\gamma_0$, sog **Abklingzeit**, nur noch ein e-tel ihres Anfangswertes.

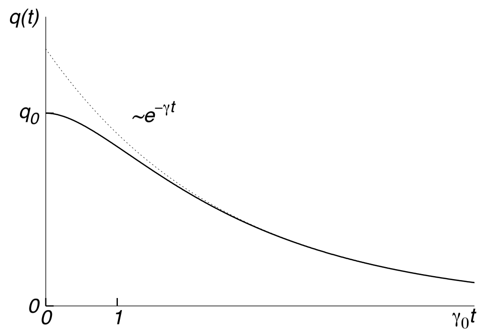

Abb 13.3 *Die überdämpfte Schwingung;* $\gamma_0 = 1.25\omega_0$*; Anfangswert* $v_0 = 0$.

Im entgegengesetzten Fall der starken Reibung, $\gamma_0 > \omega_0$, sind beide Wurzeln $\lambda_\pm$ negativ reell. Die allgemeine Lösung ist die Überlagerung zweier monoton abfallender Exponentialfunktionen. Wegen $|\lambda_-| < |\lambda_+|$ dominiert nach hinreichend langen Zeiten der zweite Summand,

$$t \gg 1/\gamma_0 : \quad q(t) \approx b e^{-\gamma t} , \tag{13.49}$$

wobei γ eine effektive Dämpfungskonstante,

$$\gamma = \gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - \omega_0} \tag{13.50}$$

deren Wert gegenüber der "nackten" Dämpfungkonstanten γ_0 etwas reduziert ist.

Im Fall der sog *Überdämpfung*, $\gamma_0 \gg \omega_0$, lässt sich γ approximieren,

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0(1 - \sqrt{1 - \omega_0^2/\gamma_0^2}) && (13.51) \\ &= \gamma_0 \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\gamma_0^2} + \dots \right) && (13.52) \\ &\approx \omega_0^2/(2\gamma_0) . && (13.53) \end{aligned}$$

Offensichtlich wächst die Abklingzeit $\tau = 1/\gamma$ mit wachsendem γ_0.

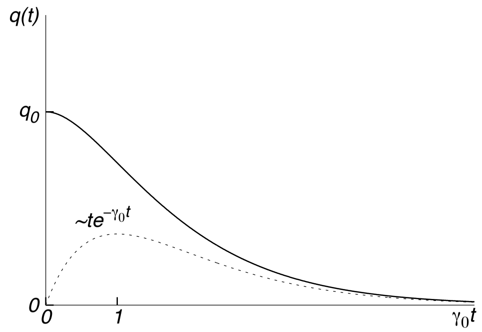

Abb 13.4 *Der aperiodische Grenzfall (kritische Dämpfung); Anfangswert* $v_0 = 0$.

Im Fall der *kritischen Dämpfung*, $\gamma_0 = \omega_0$, fallen beide Eigenwerte λ_+ und λ_- zusammen: der Exponentialansatz ergibt in diesem Fall nur eine Lösung der Bewegungsgleichung. Da die DGL von zweiter Ordnung muss eine zweite, linear unabhängige

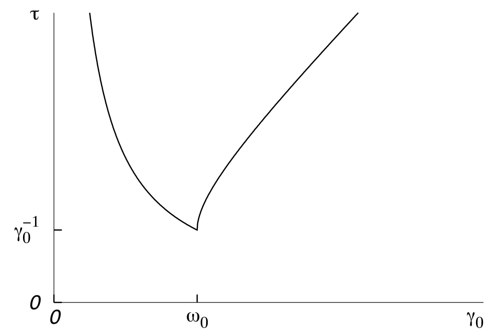

Abb 13.5 *Die Abklingzeit* $\tau = -1/\mathrm{Re}(\lambda_-)$.

Lösung existieren. Bildet man, zunächst für $\gamma_0 \neq \omega_0$, die Differenz $e^{\lambda_+} - e^{\lambda_- t}$, und berechnet anschließend den Grenzwert für $\gamma_0 \to \omega_0$, findet man $te^{-\gamma_0 t}$ als die zweite gesuche Lösung. Die allgemeine Lösung kann dann als die Superposition der beiden Partikularlösungen angegeben werden,

$$q(t) = (q_0 + (v_0 + \gamma_0 q_0)t)\, e^{-\gamma_0 t}\,. \tag{13.54}$$

Beim Bau von Messinstrumenten mit schwingungsfähigen Zeigern wird oft die kritische Dämpfung eingestellt damit der Zeiger schenllstmöglich auf zeitliche Änderungen der zu messendn Größe reagiert. Im Regime kleiner Dämpfung fällt die Abklingzeit mit wachsendem γ_0, im Regime starker Überdämpfung wächst die Abklingzeit mit wachsendem γ_0. Die kleinstmögliche Abklingzeit ergibt sich gerade für $\gamma_0 = \omega_0$, also im Fall kritischer Dämpfung.

▷ Aufgabe 13-2 (Der getriebene harmonische Oszillator)

Um einen Oszillator anzuregen bedarf es einer äußeren Einwirkung. Beim Fadenpendel, beispielsweise, kann man dem Teilchen mit dem Hammer einmalig einen Schlag versetzen. Diese Art der Anregung studieren wir in Abschnitt .

Eine andere Art der Anregung besteht darin, den Oszillator einer periodischen Kraft auszusetzen. Damit kann man kontinuierlich Energie in den Oszillator pumpen, und so die Reibungsverluste ausgleichen. Ausserdem kann man damit erreichen, den Oszillator zu starken Schwingungen anzuregen, obwohl der mittlere Kraftaufwand in Grenzen bleibt. Wenn Sie im Wald einen morschen Baum fällen wollen, machen Sie von diesem Umstand umstandslos Gebrauch.

Instruktiv ist der Fall einer harmonisch modulierten äußeren Kraft. Die entsprechende Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} + 2m\gamma_0\dot{q} + m\omega_0^2 q = F_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega)\,, \qquad F_\Omega \geq 0\,, \tag{13.55}$$

begegenet Ihnen im Elektronikpraktikum beim getriebenen LRC-Schwingkreis.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und lösen Sie das AWP. Diskutieren Sie die Lösungen in Bezug auf die Verstimmung der Antriebsfrequenz Ω gegenüber der Eigenfrequenz ω_0.

Lösung:

Wir lösen die DGL (13.55) in komplexer Form,

$$m\ddot{\xi} + 2m\gamma_0\dot{\xi} + m\omega_0^2\xi = F_1 e^{-i\Omega t}\,, \qquad F_1 = F_\Omega e^{i\varphi_\Omega} \tag{13.56}$$

und nehmen von der Lösung den Realteil. Dieser löst die ursprüngliche Gleichung (13.55), denn Gl (13.56) lautet ausgeschrieben

$$\left(m\frac{d^2}{dt^2} + 2m\gamma\frac{d}{dt} + m\omega_0^2\right)(\mathrm{Re}(\xi) + i\mathrm{Im}(\xi)) = F_\Omega\cos(\Omega t - \varphi_\Omega) - iF_\Omega\sin(\Omega t - \varphi_\Omega)\,, \tag{13.57}$$

und die Gleichheit zweier komplexer Zahlen ist gegeben bei Gleichheit der Real- und Imaginärteile. Es lohnt sich, komplex zu rechnen, da die Ableitungsregeln von Exponentialfunktionen einfacher sind als die Ableitungsregeln von Sinus und Kosinus.

Gleichung (13.56) ist eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung ist eine Superposition einer beliebigen Partikularlösung ξ_{inhom} der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung ξ_{hom} der homogenen Gleichung,

$$\xi = \xi_{\mathrm{hom}} + \xi_{\mathrm{inhom}}\,, \tag{13.58}$$

Eine Partikularlösung der inhomgenen Gleichung

$$\xi_{\mathrm{inhom}}(t) = a_1 e^{-i\Omega t} \tag{13.59}$$

Der Ansatz ist mathematisch naheliegend: unter Ableitung reproduziert sich die Exponentialfunktion, d.h. die linke Seite in (13.56) zeigt das gleiche Zeitverhalten wie die rechte Seite,

$$\left(-m\Omega^2 - 2im\gamma_0\Omega + m\omega_0^2\right) a_1 e^{-i\Omega t} = F_1 e^{-i\Omega t} \tag{13.60}$$

bzw

$$a_1 = \frac{F_1/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma_0\Omega}\,. \tag{13.61}$$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung – die *Antwort* des harmonischen Oszillators – ist proportional der treibenden Kraft. Sie ist allerdings komplex und hängt stark von der Frequenz der treibenden Kraft im Verhältnis zu Frequenz und Dämpfungskonstante des freien Oszillators ab.

In der Polardarstellung

$$a_1 = |a_1| e^{i\phi_\Omega}\,, \tag{13.62}$$

ergibt sich

$$a_\Omega \equiv |a_1| = \frac{F_\Omega/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma_0^2\Omega^2}}\,, \qquad \tan(\phi_\Omega - \varphi_\Omega) = \frac{2\gamma_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,. \tag{13.63}$$

wobei wir abkürzend $a_\Omega := |a_1|$ verwenden. Mit dieser Notation liest sich die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung (13.55)

$$q(t) = a\cos(\omega t - \varphi)e^{-\gamma_0 t} + a_\Omega \cos(\Omega t - \phi_\Omega)\,, \tag{13.64}$$

worin a und φ Integrationskonstanten, die beispielsweise über die Anfangsbedingung festgelegt werden können, und a_Ω, ϕ_Ω gemäß Gl (13.63).

Der erste Term von (13.64) beschreibt eine freie gedämpfte Schwingung des Oszillators mit seiner "natürlichen" Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}$, während der zweite Term

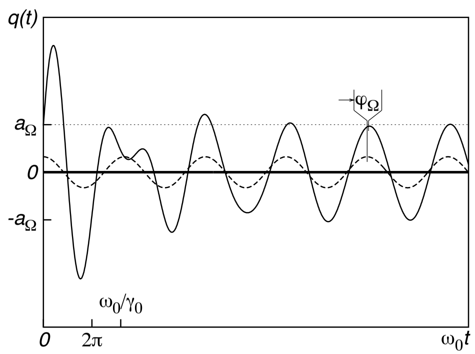

Abb 13.6 *Auslenkung $q(t)$ des harmonisch getriebenen harmonischen Oszillators.*

eine *erzwungene Schwingung* beschreibt, die der äußeren periodischen Einwirkung mit der eingeprägten Frequenz Ω unentwegt folgt. Die freie Schwingung ist nach einer hinreichend langen Zeit $t \gg \gamma_0^{-1}$ abgeklungen. Auf solchen Zeitskalen verbleibt nur die erzwungene Schwingung – die äußere Kraft hat dann den Oszillator "versklavt" – vgl Abb (13.6).

Als Funktion von Ω weisen die Amplitude a_Ω und die Phasendifferenz $\Delta\phi_\Omega := \phi_\Omega - \varphi_\Omega$ ausgeprägtes *Resonanzverhalten* auf: für $\Omega \approx \omega$ ist die Amplitude der erzwungen Schwingung maximal, und die Phasendifferenz ist maximal indifferent (weder im Takt noch im Gegentakt mit der äußeren Kraft). Im statischen Grenzfall $\Omega \to 0$ kann der Oszillator der äußeren Kraft spielend folgen, die Phasendifferenz ist Null, der Oszillator schwingt mit einer Amplitude $a_{\Omega=0} = F_{\Omega=0}/(m\omega_0^2)$ im Takt. Im Fall starker Blauverstimmung ist das Feld zu schnell, der Oszillator hinkt mit einer Phasendifferenz π um eine halbe Periode hinterher, er schwingt – allerdings mit verschwindender Amplitude $a_{\Omega\to\infty} \to 0$ – im Gegentakt.

Die genaue Resonanzfrequenz Ω_{res} ergibt sich als Lösung der Gleichung $\frac{d}{d\Omega} a_\Omega = 0$ zu

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma_0^2} \approx \omega_0 - \gamma_0^2/\omega_0 \tag{13.65}$$

An der Resonanzfrequenz ist a_Ω maximal mit

$$a_{\Omega,\max} = \frac{F_\Omega}{2m\omega\gamma_0} \tag{13.66}$$

worin $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die natürliche Frequenz des gedämpften Oszillators.

Die Resonanzfrequenz liegt also sowohl unterhalb der natürlichen Frequenz des ungedämpften Oszillaotrs, als auch unterhalb der Eigenfrequenz des freien gedämpften Oszillators

$$\Omega_{\text{res}} \approx \omega_0 - \gamma_0^2/\omega_0 \le \omega \approx \omega_0 - \gamma_0^2/(2\omega_0) \le \omega_0 \tag{13.67}$$

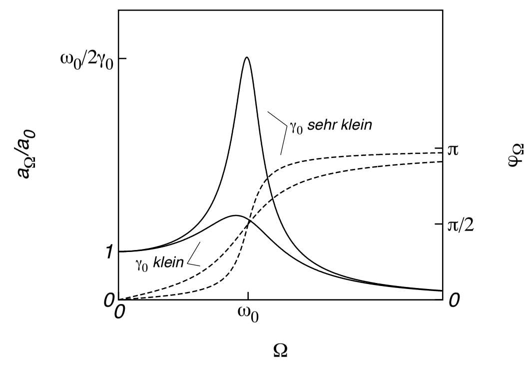

Abb 13.7 *Die Antwort des harmonisch getriebenen Oszillators als Funktion der Treibfrequenz.*

▷ Aufgabe 13-3 (Der Harmonische Oszillator mit Kraftstoß)

Wenn Sie mit einem Hammer auf ein freies Teilchen schlagen, wird es kurzzeitig beschleunigt und sich anschließend – nach dem der Schlag vorbei ist – frei weiterbewegen. Der Hammerschlag erteilt dem Teilchen eine Impulsänderung, sog *Kraftstoß*

$$p_{\text{nach}} = p_{\text{vor}} + p_{\text{K}} \tag{13.68}$$

Ein einfaches Modell für den zeitliche Verlauf der Kraft, die der Hammerschlag ausübt, ist gegeben,

$$F_{\text{H}}(t) = p_{\text{KS}}\delta_\varepsilon(t-t') \tag{13.69}$$

wobei δ_ε eine schmale Kastenfunktion

$$\delta_\varepsilon(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t' - \frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq t' + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & |t-t'| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{13.70}$$

mit t' der Zeitpunkt des Hammerschlags, und ε seine Dauer. Die Kastenfunktion ist – für jedes ε – auf eins normiert,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t-t')dt = \int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1 \tag{13.71}$$

Im Grenzfall des unendlich kurzen Hammerschlags, $\varepsilon \to 0$, wird – bei endlichem Kraftstoß – die Hammerkraft gemäß $F_{\text{H}} = p_{\text{K}}/\varepsilon$ unendlich groß: alle anderen Kräfte, die sonst noch auf das Teilchen wirken, können während des Hammerschlags vernachlässigt werden. Dieser so eingeführte *ideale Hammerschlag* kann dann als Bedingung an die Bahn des Teilchens formuliert werden,

$$\lim_{t\to t'_+} q = \lim_{t\to t'_-} q\,, \tag{13.72}$$

$$\lim_{t\to t'_+} \dot{q} = \lim_{t\to t'_-} \dot{q} + v_{\text{K}}\,, \tag{13.73}$$

lies: die Bahn ist bei t' stetig, aber die Geschwindigkeit macht dort einen Sprung $v_K = p_K/m$, worin p_K der Kraftstoß des idealen Hammerschlags.

Im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ wird aus der Kastenfunktion $\delta_\varepsilon(t-t')$ die sog *Deltafunktion*, hier bezeichnet $\delta(t-t')$. Veranschaulichen lässt sich $\delta(t-t')$ als eine Art Funktion, die überall 0 ist, nur nicht an der Stelle $t = t'$ – dort ist sie unendlich. Weil aus mathematischer Sicht Unendlich nicht zum Werteberich einer akzeptablen Funktion gehört, ist $\delta(t-t')$ im strengen Sinne keine Funktion, sondern eine *Distribution*.

Wir betrachten nun einen harmonischen Oszillator, dem zum Zeitpunkt t' ein idealer Hammerschlag versetzt wird. Bezeichnen wir die auf die auf den Kraftstoß normierte Auslenkung $G(t,t')$ lautet die fragliche Bewegungsgleichung

$$\ddot{G} + 2\gamma_0\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m}\delta(t-t') \tag{13.74}$$

(a) Man bestimme diejenige Partikular-Lösung der inhomogenen Gleichung, bei der der harmonische Oszillator vor dem Hammerschlag ruht und sich erst aufgrund des Hammerschlags in Bewegung setzt, sog *Stoß-Antwort*.

(b) Ist der Harmonische Oszillator einem Kraftpuls $F(t)$ ausgesetzt, lautet die entsprechende Differentialgleichung

$$\ddot{q} + 2\gamma_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m}F(t) = \int \delta(t-t')\frac{1}{m}F(t') \tag{13.75}$$

Konstruieren Sie eine Partikularlösung q_{inhom} dieser inhomgenen DGL.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität $F(t) = \int \delta(t-t')F(t')dt'$ und verifizeren Sie, dass q_{inhom} nichts anderes als die gewichtete Superposition von Stoß-Antworten G ,

$$q_{\text{inhom}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') \tag{13.76}$$

Lösung:

Man beachte, dass sowohl vor als auch nach dem Hammerschlag die Kraft auf rechte Seite in Gl () identisch Null. Für $t < t'$, also vor dem Hammerschlag, ist $G(t,t') = 0$, und für $t > t'$ ist diejenige freie gedämpfte Schwingung () zu wählen, die den Anschlussbedingungen () genügt,

$$G(t,t') \equiv G(t-t') = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{m\omega} e^{-\gamma_0 (t-t')} \sin[\omega(t-t')] & t > t' \\ 0 & t < t' \end{array} \right. \tag{13.77}$$