Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 1 ($40 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 17.10.2019 – Vorbesprechung 18.10, 22.10., 23.10.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Galileis Fallgesetz) (4 Punkte)

In den "Discorsi" schreibt Galilei in der Einleitung zum Dritten Tag

> [...] Einige leichtere Sätze hört man nennen: wie zum Beispiel, dass die natürliche Bewegung fallender schwerer Körper eine stetig beschleunigte sei. In welchem Masse aber diese Beschleunigung stattfinde, ist bisher nicht ausgesprochen worden; denn so viel ich weiss, hat Niemand bewiesen, dass die vom fallenden Körper in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken sich zueinander verhalten wie die ungeraden Zahlen.

Soweit Galilei. Wie passt das zu dem, was Sie in der Schule gelernt haben?

Anmerkung: Galilei kannte noch keine Infinitesimalrechnung. Die wurde erst von Newton und Leibniz erfunden.

Gehen Sie an eine Tafel. Und skizzieren Sie ein Weg-Zeit Diagramm für den freien Fall.

Anmerkung: Das Smartboard funktioniert häufig nicht. Der Techniker ist grad nicht erreichbar, und Sie haben auch keine Ahnung, wie man jetzt den Fehler behebt. Dann müssen Sie improvisieren. Und ihre ganze schöne Unterrichtsplanung ohne IT-support, ganz analog auf White-Board (Grusel), oder – wenn Sie Glück haben – auf mineralischem Abrieb auf Stein (kurz: Kreidetafel) umstellen. Dazu müssen Sie in der Lage sein Skizzen an der Tafel freihändig anzufertigen ("Skizzen-Kompetenz" – eine Unterkategorie der "Tafelbild-Kompetenz".). Beginnen Sie mal mit der Übung "gerader, horizontaler Strich", ungefähr 150cm lang (warum?). Wiederholen Sie die Übung solange, bis wirklich mal ein halbwegs horizontaler, gerader Strich dabei herauskommt ... Übung macht den Meister.

▷ Aufgabe 2 (Logik I) (2 Punkte)

Zeigen Sie: Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $(\text{nicht}B) \Rightarrow (\text{nicht}A)$ wahr ist.

Bemerkung: Hier sind Wahrheitswerttabellen hilfreich ...

▷ Aufgabe 3 (Logik II) (2 Punkte)

Falls Sie schon wissen, was man unter der Ableitung einer Funktion versteht: ist das Verschwinden der ersten Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion in einem Punkt x_0 notwendige oder hinreichende Bedingung dafür, dass die Funktion dort ein Maximum hat?

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ Aufgabe 4 (Logik III) (2 Punkt)

Jemand behauptet "Es gibt 3 Primzahlen". Stimmen Sie zu?

▷ Aufgabe 5 (Mengen I) (3 Punkt)

Die Anzahl der Elemente einer Menge A bezeichnet man üblicherweise $|A|$. Für die Vereinigungsmenge $A \cup B$ zeige man

$$|A \cup B| \leq |A| + |B| \tag{1}$$

▷ Aufgabe 6 (Mengen II) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen.

▷ Aufgabe 7 (Relationen I) (2 Punkte)

Die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist

- ☐ surjektiv, aber nicht injektiv
- ☐ injektiv, aber nicht surjektiv
- ☐ weder surjektiv noch injektiv

▷ Aufgabe 8 (Relationen II) (3 Punkte)

Sei $M = \mathbb{Z}$, dann ist $R \subset M \times M$ definiert $R = \{(x, y)|x - y \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

- ☐ diejenige Teilmenge der ganzen Zahlen, deren Elemente ohne Rest durch 3 teilbar sind.
- ☐ eine Relation, aber keine Äquivalenzrelation
- ☐ eine Äquivalenzrelation

▷ Aufgabe 9 (Umgang mit Ungleichungen) (3 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine Zahl a heißt größer als eine Zahl b, notiert $a > b$, wenn $a - b$ eine positive Zahl. Und a heißt "größer gleich" b, wenn $a-b$ entweder gleich 0, oder eine positive Zahl.

Bezüglich Addition und Multiplikation zweier Ungleichungen reeller Zahlen gelten folgende Sätze, die wir Sie bitten zu beweisen:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } a \leq b \text{ und } c \leq d, &\quad \text{dann} \quad a + c \leq b + d \\ \text{Wenn } 0 \leq a \leq b \text{ und } 0 \leq c \leq d, &\quad \text{dann} \quad a \cdot c \leq b \cdot d \end{aligned} \tag{2}$$

▷ Aufgabe 10 (Fakultät) (3 Punkte)

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl n kürzt man in der Notation ab,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \tag{3}$$

genannt "n-Fakultät", und vereinbart $0! := 1$. Die Fakultät spielt eine große Rolle in der Kombinatorik.

Zeigen Sie: "Die Anzahl aller möglichen Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$."

▷ Aufgabe 11 (Biomialkoeffizient) (4 Punkte)

Neben der Fakultät stößt man in der Kombinatorik auch häufig auf

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4}$$

genannt *Binomialkoeffizient.*

(a) Zeigen Sie: die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nicht leeren Menge mit n Elementen ist im Falle $0 < k \leq n$ gegeben $\binom{n}{k}$.

(b) Seinen Namen verdankt der Binomialkoeffizient dem *Binomischen Satz*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n \equiv \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \tag{5}$$

den wir Sie bitten zu beweisen.

Binomialkoeffizienten notiert man zuweilen in einem sog. *Pascal'schen Dreieck*. Schauen Sie mal irgendwo nach ...

▷ Aufgabe 12 (Bernoullische Ungleichung) (4 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Bernoulli'sche Ungleichung*

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x\,, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},\ x > -1,\ x \neq 0 \text{ und } n = 2, 3, \dots. \tag{6}$$

▷ Aufgabe 13 (Geometrische Summenformel)* (4 Punkte)

Zur Erinnerung: Mit x^n meint man das n-fache Produkt von x mit sich selbst, $x^n = x \cdot x \cdots \cdot x$ (n Faktoren), und es gilt $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

Beweisen Sie die *geometrische Summenformel*

$$1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \qquad q \neq 1\,. \tag{8}$$

Was erhalten Sie im Fall $|q| < 1$ für $N \to \infty$?

<u>Hinweis:</u> Überlegen Sie doch einmal, wie sich das Produkt $(1 + x + \dots + x^N)(1-x)$ in ausmultiplizierter Form darstellt ...

Ach übrigens, Sie können natürlich auch zur Beweismethode "vollständige Induktion" greifen.

▷ Aufgabe 14 (Logikus und Rekursine) (π Punkte)

Lehrer Lempel, gefürchtet für seinen messerscharfen Verstand, behauptet, er würde an irgendeinem Tag in der nächsten Woche genau eine Mathearbeit schreiben lassen, aber man würde am Morgen des fraglichen Tages nicht wissen, dass der Tag der Klassenarbeit gekommen sei. Rekursine, das anerkannte Mathe-Ass der Klasse, beruhigt: "Lempel lügt!". Logikus, ebenso pfiffig, ergänzt "Trotzdem sollten wir büffeln bis zum Umfallen!" Wie argumentiert Rekursine, und wieso sollte man Logikus' Rat ernst nehmen?