Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 2 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 24.10.2019 – Abgabe 31.10.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (Umgang mit komplexen Zahlen)* (6 Punkte)

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$.

(a) Bilden Sie die Summe $z_1 + z_2$ und Differenz $z_1 - z_2$ arithmetisch und zeichnerisch mittels Zeigerdarstellung in der Gauss'schen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie die Absolutbeträge $|z_1|$, $|z_2|$.

(c) Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$, jeweils in der Form $u + iv$ mit u, v reell.

▷ Aufgabe 2 (Polardarstellung komplexer Zahlen)* (4 Punkte)

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, $z_2 = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$, worin α, β zwei reelle Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und zeigen Sie, dass $z_1 \cdot z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$.

<u>Hinweis:</u> Erinnern Sie sich beizeiten an die Additionstheoreme der Trigonometrie. Falls Sie diese vergessen haben, oder mit dem Begriff überhaupt nichts anfangen können, schauen Sie mal unter dem entsprechenden Stichwort in ein Lehrbuch, ein Schulbuch, oder eine Formelsammlung ...

▷ Aufgabe 3 (Dreiecksungleichung) (4 Punkte)

Man beweise und interpretiere in der Zeigerdarstellung, dass für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,, \tag{2}$$

sog. *Dreiecksungleichung.*

▷ Aufgabe 4 (Oszillator)* (6 Punkte)

Für festes ω ("Kreisfrequenz") und reelle Variable $t \in [0, 2\pi/\omega[$ ("Zeit") lässt sich die Funktion $t \mapsto e^{-i\omega t}$ als Kurve in der komplexen Ebene darstellen. Welche Kurve wäre das?

<u>Hinweis:</u> Vielleicht machen Sie von der Identität $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ Gebrauch ...

Möglicherweise haben Sie in der Schule die Ableitung der e-Funktion kennengelernt, $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $q(t) = q_0 e^{-i\omega t}$ der Gleichung $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$ genügt. Erinnert Sie diese Gleichung an etwas (denken Sie mal an ein Federpendel)?

---

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...