Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 3 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

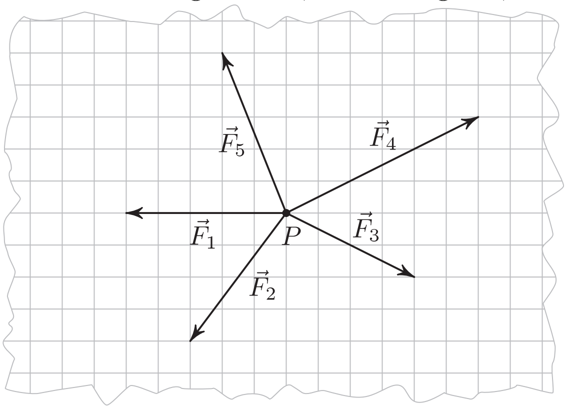
Ausgabe 07.11.2019 – Abgabe 14.11.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

ACHTUNG! Wir sind hier nicht pedantisch. Wir machen keinen Unterschied zwischen einem Vektor $\vec{v} \in V$ (V ist ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum) und seinem Darsteller (Zahlenspalte) $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ (mit "Standard-Skalarprodukt") ...

▷ Aufgabe 1 (Kräfte)* (3 Punkte)

Die Abbildung zeigt fünf Kräfte, die an einem Punkt P angreifen. Bestimmen Sie (1) zeichnerisch, (2) arithmetisch die Gegenkraft, die nötig ist, um P in Ruhe zu halten.



▷ Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Vektorkoordinaten) (4 Punkte)

Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz der Vektoralgebra: Ist $\mathcal{B} := (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V, dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \,. \tag{1}$$

Bemerkung 1: Um die Bestimmtheit der λ_i durch den Vektor $\vec{v}$ auszudrücken, schreibt man statt λ_i gerne v_i (bzw. v^i), und nennt die v^i die *Koordinaten* (non-chalant: die *Komponenten*) von $\vec{v}$.

Bemerkung 2: Angesichts des hier bewiesenen Befundes sind alle n-dimensionalen reellen Vektorräumer isomorph dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Oder – noch prägnanter – eigentlich gibt es nur einen n-dimensionalen reellen Vektorraum, und das ist der $\mathbb{R}^n$.

▷ Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit)* (6 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden drei Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

(b) Und wie sieht es mit folgenden drei Vektoren aus:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

▷ Aufgabe 4 (Skalarprodukt berechnen)* (4 Punkte)

Für die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

berechne man die Norm $\|\vec{a}\|$ bzw $\|\vec{b}\|$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$, und den Winkel, den die beiden Vektoren bilden.

Bemerkung: Bei so einer Aufgabe darf man getrost zu den Rechenregeln für das "Standard-Skalarprodukt" im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ greifen.

▷ Aufgabe 5 (Untervektorraum) (3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sind U und W Untervektorräume von V, so ist auch der Durchschnitt $U \cap W$ Untervektorraum von V.

(b) Die Vereinigungsmenge $U \cup W$ zweier Untervektorräume U, W ist i.A. kein Untervektorraum, wohl aber die *Summe*

$$U + W := \{\vec{u} + \vec{w} | \vec{u} \in U, \vec{w} \in W\} \subset V\,. \tag{5}$$

Bemerkung: Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, beispielsweise, kann man sich in Form der Geraden und Ebenen durch einen irgendwie bestimmten "Ursprung" eines dreidimensionalen affinen Raums veranschaulichen. Warum muss der Ursprung dabei sein? – Nun, er repräsentiert den Null-Vektor …

▷ Aufgabe 6 (π Punkte)

In der Newtonschen Physik ist das mathematische Modell des physikalischen Raums ein drei-dimensionaler Euklidischer Raum: Eine Punktmenge (die Menge der Raumpunkte), die so beschaffen ist dass (u.a) (1) der Satz des Pythagoras gilt, (2) die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad beträgt, und (3) sich Parallelen nur "im Unendlichen" treffen. Verschiebungen (von Raumpunkten) in diesem Raum können durch Vektoren eines drei-dimensionalen Euklidischen Vektorraums beschrieben werden. Kategorial verschieden, aber an der Tafel ununterscheidbar, sind die "gerichteten Strecken" von P nach Q – bildlich der Pfeil von P nach Q – und der Verschiebungsvektor, der P nach Q überführt.

Raumpunkte, wie beispielsweise P und Q lassen sich nicht "addieren". Vektoren sehr wohl. Schreiben Sie einen kleinen Essay *Wie kann ich die konzeptionelle Unterscheidung von "Punkt" und "Vektor" im Unterricht klar machen.*