Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 4 ($20 + \pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 14.11.2019 – Abgabe 21.11.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

ACHTUNG! Wir sind hier nicht pedantisch. Wir machen keinen Unterschied zwischen einem Vektor $\vec{v} \in V$ (V ist ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum) und seinem Darsteller (Zahlenspalte) $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ (mit "Standard-Skalarprodukt") ...

▷ **Aufgabe 1** * (4 Punkte)

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

▷ **Aufgabe 2** * (1 Punkt)

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Berechnen Sie das Spatprodukt.
Hinweis: In einer früheren Übung haben Sie schon gezeigt, dass diese drei Vektoren linear abhängig. Müssen Sie das Spatprodukt also wirklich ausrechnen, oder können Sie die Antwort gleich hinschreiben?

▷ **Aufgabe 3** (3 Punkte)

In einem zwei-dimensionalen Vektorraum V sei eine lineare Abbildung $S : V \to V$ durch ihre Wirkung auf zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ erklärt

$$S(\vec{a}_1) = \vec{a}_1 , \qquad S(\vec{a}_2) = s\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \tag{3}$$

Bestimmen Sie das Schicksal eines allgemeinen Vektors $\vec{v} = \vec{a}_1 v^1 + \vec{a}_2 v^2$ unter S. Sofern V der Vektorraum der Verschiebungsvektoren auf einem affinen Raum – welche geometrische Operation wird durch S beschrieben? Ist S flächentreu?

▷ **Aufgabe 4** (4 Punkte)

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

Ein Körper kreiselt um ein gewisse Achse $\vec{n}$ mit Kreisfrequenz ω. Man überzeuge sich, dass ein Körperkrümel, der sich zur Zeit t am Ort $\vec{r}(t)$ befindet, eine Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$ aufweist, wo $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$.

Für gegebenes $\vec{\omega}$ hängt $\vec{v}$ linear von $\vec{r}$ ab. Wie lautet die Matrixdarstellung der Gleichung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$?

▷ **Aufgabe 5** * (8 Punkte)

Unter einem Ortsvektor $\vec{x}$ versteht man einen Vektor, dessen Schaft in einem besonderen Punkt, dem "Ursprung" O befestigt ist, und dessen Spitze einen Raumpunkt P bezeichnet. Wählt man eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i$, fungieren die Komponenten x^1, x^2, x^3 des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{e}_i x^i$ als kartesische Koordinaten von P. Dabei zeigt $\vec{e}_1$ vereinbarungsgemäß in Richtung der X-Achse, $\vec{e}_2$ in Richtung der Y-Achse, und $\vec{e}_3$ in Richtung der Z-Achse. Die Komponenten von $\vec{x}$ schreibt man dann auch x, y, z statt des verwirrenden x^1, x^2, x^3.

Hat man nun eine Vektorgleichung, beispielsweise $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$, bestimmen deren Lösungen ein geometrisches Objekt. Im Falle $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$ sind alle Ortvektoren $\vec{x}$ Lösung, die senkrecht auf $\vec{e}_3$ stehen. Das sind aber alle diejenigen Ortsvektoren, deren Z-Komponente gleich Null, und die Endpunkte dieser Vektoren bilden eine Ebene, die XY-Ebene!

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x}| = 1$ bestimmt?

(b) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ bestimmt, wobei $\vec{x}_0$ fester Ortsvektor und R ein festes Skalar?

(c) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ bestimmt, wobei $\vec{e}$ fester Einheitsvektor?

(d) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ bestimmt, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ feste Vekoren?
Hinweis: Eigentlich sind das drei Gleichungen. Warum?

(e) Überzeugen Sie sich davon, dass mit $\vec{x} \cdot \vec{k} = k^2$ für festes $\vec{k}$ und $k = |\vec{k}|$ der Betrag von $\vec{k}$ die Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ im Abstand k vom Ursprung ausgezeichnet ist.

Der Duck einer Schallwelle kann in der Form $p(\vec{x}, t) = p_0 + f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ angegeben werden, worin f irgendeine "schöne" Funktion (nicht unbedingt Sinus oder Cosinus).

(f) Bestimmen Sie die Orte an denen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 der Druck $p_0 + f(0)$ herrscht.

(g) Wie bewegt sich das in (f) bestimmte geometrische Objekt, und welches ist gegebenenfalls seine Geschwindigkeit?

Bemerkung: In (f) und (g) begegnet Ihnen ein wichtiges physikalisches Konzept – die *ebene Welle*. Warum die wohl "eben" heißt?