

Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 6 (20 Punkte)

Ausgabe 28.11.2019 – Abgabe 05.12.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1 *** (5 Punkte)

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

▷ **Aufgabe 2** (4 Punkte)

Für die 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

bestimme man die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren.

Bemerkung: Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (Pendel etc.) nimmt in kanonischen Variable q, p (q : Auslenkung, p : Impuls) die Form an $\dot{q} = \frac{1}{m}p$, $\dot{p} = -m\omega_0^2 q$. In "Matrizenschreibweise" also $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$. Der Exponentialansatz $q = \tilde{q}e^{\lambda t}$, $p = \tilde{p}e^{\lambda t}$ führt dann ganz natürlich auf das Eigenwertproblem zu A .

▷ **Aufgabe 3** (11 Punkte)

Drei Punkte A, B, C gleicher Masse bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks. Die beiden gleichlangen Schenkel $\overline{AB} = \overline{AC} = c$ schließen den Winkel α ein. Berechnen Sie

- den Trägheitstensor,
- die Hauptträgheitsmomente,
- die Richtung der Hauptträgheitsachsen dieses Körpers bezüglich des Punktes A .
- Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes S und seine Abstände von den Punkten A, B, C .
- Berechnen Sie den Trägheitstensor des Dreiecks bezüglich des Schwerpunktes.

Erläuterung: In einer Matrixdarstellung sind die Elemente des Trägheitstensors $\underline{\Theta}$ definiert

$$\Theta_{ii} = \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} \left((\vec{r}^{(\alpha)})^2 - (x_i^{(\alpha)})^2 \right), \quad \Theta_{ij} = - \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} \quad (3)$$

wo der Index α über Massepunkte summiert, und i, j die kartesischen Koordinaten eines Ortsvektors \vec{r} nummeriert. In der XY -Ebene liege \overline{AB} entlang der X -Achse, mit A im Ursprung.