Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 7 (20 Punkte)

Ausgabe 05.12.2019 – Abgabe 12.12.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

Eine wichtige Zahl, die man jeder $n \times n$ quadratischen Matrix A zuordnen kann, ist ihre *Spur* (engl. Trace),

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A^i{}_i \tag{1}$$

also "Summe der Diagonalelemente". Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA) && (2) \\ \mathrm{Tr}(S^{-1}AS) &= \mathrm{Tr}(A) && (3) \end{aligned}$$

und schließen: die Spur einer diagonalisierbaren Matrix ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte.

Übrigens - das Produkt der Eigenwerte ist gleich der Determinante. Könnten Sie das auch beweisen?

▷ Aufgabe 2

Gegeben eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit a, b, c, d komplex. Unter welchen Bedingungen ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls Eigenwerte und Eigenvektoren als Funktion von a, b, c, d.

▷ Aufgabe 3

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien Basisvektoren verabredet,

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Bestimmen Sie die algebraische Dualbasis $\underline{b}^i$, $i = 1, 2, 3$.