

Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 8 (20 Punkte)

Ausgabe 12.12.2019 – Abgabe 19.12.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** *

(2 Punkte)

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung des Summanden könnte sich als nützlich erweisen ...

▷ **Aufgabe 2**

(4 Punkte)

Falls Sie sich jemals gefragt haben, wie man Wurzeln aus 2 zieht (vulgo “ $\sqrt{2}$ ausrechnet”) – hier ist die Antwort: mit Hilfe der Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (3)$$

worin a eine vorgegebene reelle Zahl größer Null (deren Wurzel man berechnen möchte).

- (a) Berechnen Sie für den Fall $a = 2$ und Startwert $x_0 = 1$ die drei ersten Glieder der Folge (). Lassen Sie sich anschließend die Wurzel aus 2 von Ihrem Taschenrechner anzeigen und vergleichen Sie x_3 mit der Anzeige Ihres Taschenrechners.
- (b) Zeigen Sie: Bei beliebig gewähltem Startwert $x_0 > 0$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ und die Folge () konvergiert ab $n = 1$ monoton fallend gegen \sqrt{a} .
- (c) Zeigen Sie, dass der Fehler $f_n := x_n - \sqrt{a}$ abgeschätzt wird $|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$. Schließen Sie, dass für x_3 im obigen Beispiel $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-4} \cdot 10^{-4}$. Auf wieviele Stellen (hinter dem Komma) approximiert also x_3 die Zahl $\sqrt{2}$?

▷ **Aufgabe 3 (Weihnachtsstern der Pythagoräer)**

(π Punkte)

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon), tragen die Diagonalen ein, erhalten so ein Pentagramm, und überzeugen sich davon, dass hier gilt

$$\text{Diagonale} : \text{Seite} = \text{Seite} : (\text{Diagonale} - \text{Seite}) \quad (7)$$

Hinweis: Die Diagonalen bilden in der Mitte wiederum ein Pentagon – hilft das weiter?

Benennen Sie

$$g := \text{Diagonale} : \text{Seite} \quad (8)$$

und zeigen dass g nicht rational.

Die Zahl g nennt man den *goldenen Schnitt*. Betrachten Sie zum Startwert $x_0 = 1$ die Folge

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad (9)$$

und zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$ mit

$$g = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} \right). \quad (10)$$

Gehen Sie auf Wikipedia, und lesen dort unter dem Stichwort “Pythagoräer” und “Goldener Schnitt” nach, was es mit den beiden auf sich hat.

▷ **Aufgabe 4** (4 Punkte)

Eine Folge von Funktionen $(f_n : D \rightarrow \mathbb{C})$ heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ der Funktionswerte konvergiert. Ist das der Fall, wird durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in D \quad (11)$$

die sog. *Grenzfunktion* $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Dabei kann es passieren, dass zwar jedes Folgenglied f_n stetig, die Grenzfunktion f aber unstetig. Dazu ein Beispiel.

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass für jedes n die Funktion f_n stetig auf $[0, 1]$, dass aber die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases} \quad (12)$$

unstetig auf $[0, 1]$.

▷ **Aufgabe 5** (2 Punkte)

Einem Praktikumsbericht entnehmen Sie eine Messdatenkurve, die in doppelt-logarithmischer Auftragung von der Form einer Geraden durch den Punkt $(\xi_0 = 3, \eta_0 = 2)$ mit Steigung $\frac{3}{2}$ ist. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt die Kurve dar? Machen Sie sich ein Bild (Funktionsgraph)! Geben Sie ein Beispiel, wo doppelt-logarithmische Auftragung Sinn macht.

Hinweis: “Doppelt-Logarithmisch heißt, dass beide Achsen logarithmisch geteilt sind, also statt x und y sind $\xi = \log_a x$ und $\eta = \log_a y$ aufgetragen, wobei üblicherweise $a = 10$.