Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 9 ($23+\pi$ Punkte)[1]

Ausgabe 19.12.2019 – Abgabe 19.12.2019 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** * (4 Punkte)

Es spricht nichts dagegen, für die trigonometrischen Funktionen auch komplexe Argumente zuzulassen. Man erweitere einfach die Definitionen, und setze für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1}$$

Zeigen Sie: Nach wie vor gilt hier die Euler'sche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{2}$$

der Satz des Pythagoras

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \tag{3}$$

und die Additionstheoreme

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \tag{4}$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{5}$$

▷ **Aufgabe 2** (π Punkte)

Ebenso wie die trig-Funktionen könne auch die Hyperbelfunktionen für komplexe Argumente definiert werden,

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \tag{6}$$

Zeigen Sie: Die Hyperbelfunktionen und die Trigonometrischen Funktionen sind verknüpft

$$\cosh z = \cos(iz), \qquad \sinh z = -i \sin(iz), \tag{7}$$

woraus sich mit Blick auf (4) und (5) Additionstheoreme angeben lassen,

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \tag{8}$$
$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \tag{9}$$

und es gilt der hyperbolische Pythagoras,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \tag{10}$$

Die Reihendarstellung entnimmt man der Reihenddarstellung der Exponentialfunktion und Berücksichtigung von (6),

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{11}$$

[1] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft ...

▷ **Aufgabe 3** * (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$(a) \qquad e^{-x}(\sin x - \cos x) \tag{12}$$

$$(b) \qquad \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} \tag{13}$$

$$(c) \qquad \log_a x \tag{14}$$

$$(d) \qquad \sin(\sin x) \tag{15}$$

▷ **Aufgabe 4** (3 Punkte)

Der Tangens, daran sei erinnert, ist definiert $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion, also $\tan(\arctan x) = x$. Beweisen Sie

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{16}$$

▷ **Aufgabe 5** (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto x^x$ für $x > 0$, bilden ihre Ableitung, und skizzieren Sie auch die Ableitung. Was wäre die Ableitung der Funktion $\frac{d}{dx}x^x$? Skizze?

▷ **Aufgabe 6** (3 Punkte)

Für höhere Ableitungen, daran sei erinnert, benutzt man die abkürzende Schreibweise $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n}$, mit $f^{(0)} := f$. Beweisen Sie, für n-mal differenzierbare Funktionen f, g, die *Leibnizregel*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,. \tag{17}$$

▷ **Aufgabe 7*** (3 Punkte)

Mittels d'Hospital berechne man den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \tag{18}$$

▷ **Aufgabe 8*** (3 Punkte)

Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x) = x^3 - x$ auf $[-1, 2]$, skizziere den Funktionsgraphen, und kennzeichne die Extrema.